

Les nombres complexes.

La maîtrise des nombres complexes est fondamentale pour étudier l'électronique, son enseignement est un passage obligé dans toutes les filières du génie électrique et celles du traitement du signal, elle est utile au radioamateur qui désire employer un analyseur vectoriel, utiliser un abaque de Smith, calculer un filtre ou comprendre l'analyse spectrale, le principe des modulations numériques et bien d'autres choses encore.

Bref historique sur la création des nombres complexes: le sujet a évolué lentement à travers l'histoire des mathématiques, il a été initialement élaboré par des mathématiciens italiens au XVI^{ème} siècle pour résoudre des équations algébriques comme nous allons le voir dans la suite. Le sujet a été ensuite formalisé et les principaux contours et théorèmes sont apparus au XVII^{ème} siècle et XVIII^{ème} siècle. La corporation des mathématiciens a été longtemps très réticente à admettre ces nombres complexes, il faut attendre Euler et Gauss pour donner de l'importance au sujet, puis les lettres de noblesse viendront au XIX^{ème} siècle avec Riemann et Cauchy pour les fonctions de la variable complexe et dont les répercussions seront très importantes dans les sciences et techniques actuelles.

Le sujet des nombres complexes a surtout trouvé ses applications et a été mis en lumière par de grands ingénieurs scientifiques du début du XX^{ème} siècle comme Heaviside et Steinmetz pour développer de nouveaux concepts techniques, Heaviside avec la propagation des signaux dans les lignes télégraphiques et Steinmetz en électrotechnique pour le transport et la transformation de l'énergie électrique. On peut donc affirmer sans vexer le monde des mathématiciens, que ce sujet appartient aussi à la collectivité des physiciens, des électriciens, électroniciens et apparentés au génie électrique et qu'il peut intéresser très vivement les radioamateurs!

Les nombres impossibles sont apparus au XVI^{ème} siècle, en Italie, avec Cardan pour la résolution de certaines équations du second et du troisième degré en inventant un concept un peu fou mais qui marchait. Cette invention des nombres imaginaires est apparue par nécessité dans certains calculs. Pour comprendre, nous allons partir de la définition de la racine carrée qui apparaît quand nous voulons résoudre une équation du second degré.

La racine carrée d'un nombre réel est par définition : $\sqrt{a} = b$, cela signifie que $b^2 = a$.

Par exemple : $\sqrt{4} = 2$ parce que $2^2 = 4$ de même : $\sqrt{25} = 5$ parce que $5^2 = 25$, etc.

Rappel de la règle des signes pour la multiplication : $5 \times 2 = 10$, $(-5) \times 2 = -10$, $(-5) \times (-2) = 10$,

qui s'étend donc à la division $10/2 = 5$, $(-10)/2 = -5$, $(-10)/(-2) = 5$.

Peut-on avoir une racine carrée d'un nombre négatif ? $\sqrt{-4} \neq 2$ parce que $2^2 = 4$ et pas -4

ainsi que $\sqrt{-4} \neq -2$ parce que $(-2)^2 = 4$ et pas -4 , $\sqrt{-4}$ n'existe pas !

$\sqrt{1} = 1$ existe, mais comme $\sqrt{-4} = 2\sqrt{-1}$, $\sqrt{-1}$ n'existe pas.

Si nous ne travaillons qu'avec les nombres réels, l'argument sous le signe radical ne doit pas être négatif, cela est bien connu en arithmétique. Un nombre négatif ne peut pas être un carré, la notion de racine carrée n'a pas de sens au moins dans le monde des nombres réels !

Nombres imaginaires : entrons maintenant dans un autre monde et imaginons que la racine carrée d'un nombre négatif existe et pour $\sqrt{-1}$ nous l'appellerons i , soit $\sqrt{-1} = i$, ce n'est pas un nombre réel mais **un nombre impossible** comme Cardan le nommait ou **imaginaire** comme on dit aujourd'hui. En reprenant la définition de la racine carrée : $\sqrt{-1} = i$ signifie que $i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$.

Si $i^2 = -1$, nous obtenons facilement $i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$,

puis $i^4 = i^3 \cdot i = -i \cdot i = -i^2 = -(-1) = 1$ et ainsi de suite, cela se reproduit périodiquement : $i^5 = i$, $i^6 = -1$, $i^7 = -i$, $i^8 = 1$, etc. et infiniment.

La nécessité du calcul des racines de nombre négatif est venue à Cardan pour résoudre certaines équations du second degré de la forme : $y = ax^2 + bx + c$, où a , b et c sont des constantes réelles. Ce type d'équation donne des graphes de forme parabolique et selon ces constantes, la parabole peut couper l'axe des ordonnées en des points qu'on appelle les racines.

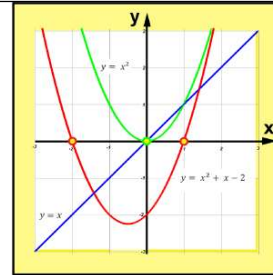
La recherche de ces racines se fait en posant : $ax^2 + bx + c = 0$, elles se trouvent en résolvant l'expression

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, souvent on pose $\Delta = b^2 - 4ac$ nommé le déterminant, les racines sont donc données par

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, en faisant varier le signe qui est devant le radical.

Par exemple pour $y = x^2 + x - 2$ on a $\Delta = 9$ et donc deux racines $x_1 = 1$, $x_2 = -2$ et l'équation peut alors se factoriser :
 $y = (x - x_1) \cdot (x - x_2) = (x - 1) \cdot (x + 2) = x^2 + x - 2$.

Si la parabole est tangente à l'axe des ordonnées comme avec $y = x^2$, on a $\Delta = 0$ et la racine est dite "double" $x_1 = x_2 = 0$.



Si la parabole ne coupe pas les ordonnées, c'est que le déterminant est négatif, par exemple pour :

$y = x^2 + x + 1$, on a $\Delta = -3$ qui est négatif et la solution serait $x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ avec un argument négatif sous le signe radical. La solution

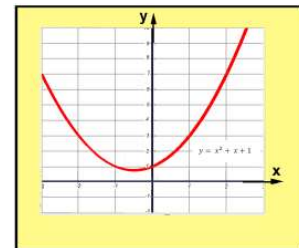
devient :

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-1} \sqrt{3}}{2} = \frac{-1 \pm i \sqrt{3}}{2}$ soit deux racines possédant une

partie réelle et une partie imaginaire $x = -1/2 \pm i\sqrt{3}/2$

Ces racines ont la même partie réelle mais leur partie imaginaire sont de signe opposé et elles sont dites "conjuguées".

$y = (x - x_1) \cdot (x - x_2) = \left(x + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = x^2 + x + 1$, après développement.



A titre d'exercice, vous pouvez essayer de résoudre le problème posé par Cardan, dans "Ars magna"

"Diviser 10 en deux parties dont le produit soit 40"

Sol : racines de $x^2 - 10x + 40 = 0$, $x = \frac{10 \pm \sqrt{-60}}{2} = 5 \pm \sqrt{-15} = 5 \pm i\sqrt{15}$

Référence bibliographique : Les nombres premiers, un long chemin vers l'infini, Hors-série : Le Monde, page 83 Nombres imaginaires

Nombres complexes : après les nombres imaginaires, les mathématiciens ont élaboré la théorie des **nombres complexes**, ceux-ci possédant une partie imaginaire et une partie réelle.

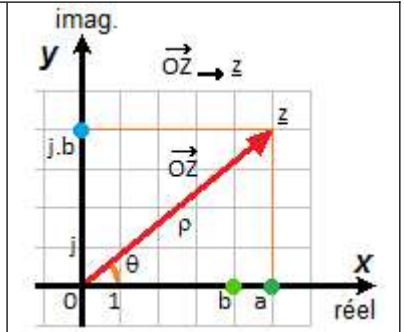
Les nombres complexes en électricité : L'usage des nombres complexes en électricité sera surtout le travail de Steinmetz aux USA, en électrotechnique au début du vingtième siècle. Un nombre négatif possède une racine carrée imaginaire: $\sqrt{-1} = i$, expression que Steinmetz transformera en $\sqrt{-1} = j$, pour ne pas confondre avec la lettre qui représente l'intensité du courant électrique, c'est cette forme que nous adopterons d'emblée dans la suite pour les mêmes raisons et en mémoire de cet ingénieur américain qui a très fortement contribué à faire évoluer l'électrotechnique. $\sqrt{-1} = j$ amène à : $j^2 = -1$

Remarque amusante : Les mathématiciens notent j l'une des racines cubiques de l'unité dont la principale utilisation aurait pu être les courants triphasés en électrotechnique mais cette notation n'a pas été adoptée par notre corporation.

Qu'est-ce qu'un nombre complexe ? Un nombre complexe est un nombre qui possède une partie réelle et une partie imaginaire. Nous représenterons, dans un premier temps, ces nombres par une lettre soulignée mais ce n'est ni obligatoire, ni systématique : $\underline{z} = z$. Les réels sont représentés par une lettre normale et les imaginaires par une lettre normale suivie ou précédée du j , ce qui veut dire multipliée par j :

$$\underline{z} = a + jb, \text{ avec } a : \text{partie réelle, } jb : \text{partie imaginaire.}$$

La représentation de ce nombre dans un plan orthonormé (axes perpendiculaires et de même graduation) due à Wessel permettra de faire le lien avec la trigonométrie et le calcul vectoriel dans le plan. Le nombre imaginaire pur j possède une mesure (module) égale à l'unité. L'axe des abscisses représente les nombres réels, celui des ordonnées les nombres imaginaires. Il est pratique d'associer à un nombre complexe un vecteur dont l'origine est en zéro et d'utiliser les constructions vectorielles pour les différentes opérations entre complexes, comme ci-dessous.

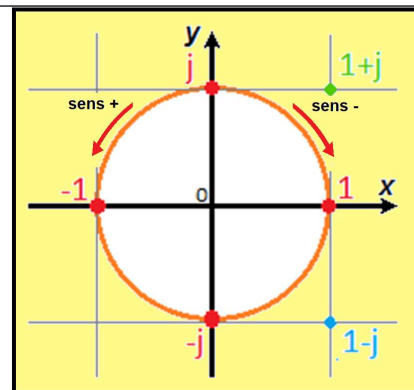


La multiplication d'un nombre réel b par j entraîne sa rotation d'un angle de $\pi/2$ et l'amène sur l'axe des imaginaires en $j.b$. Sa multiplication, une seconde fois $j.j.b = j^2.b = -b$ entraîne sa rotation d'un angle de π et vérifie bien que $j^2 = -1$.

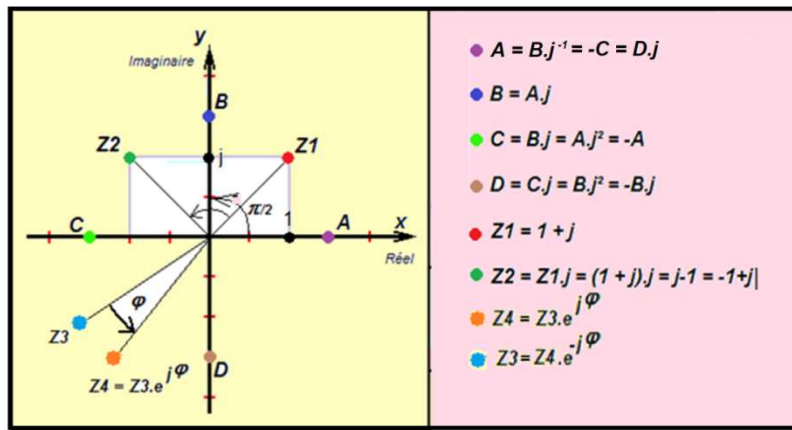
Exercice : recherchez l'expression de la longueur ρ du vecteur OZ en fonction de a et de b , ainsi que celle de son argument (angle θ) et inversement a et b en fonction de ρ et θ .

Sol : $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ puis inversement $a = \rho \cdot \cos(\theta)$ et $b = \rho \cdot \sin(\theta)$.

Nous avons vu précédemment que $\sqrt{-1} = j$ Soit $j^2 = -1$, nous obtenons facilement $j^3 = j^2 \cdot j = -1 \cdot j = -j$, puis $j^4 = j^3 \cdot j = -j \cdot j = -j^2 = -(-1) = 1$ et ainsi de suite, cela est périodique : $j^5 = j$, $j^6 = -1$, $j^7 = -j$, $j^8 = 1$, etc. Multiplier par j c'est donc faire une rotation de $\pi/2$ dans le sens positif. En conséquence, diviser par j , c'est faire une rotation de $\pi/2$ dans le sens négatif car : $j^{-1} = \frac{1}{j} = -j$



A titre d'exercice vous pouvez vérifier toutes les propositions suivantes :



Notations et écritures : Il existe plusieurs écritures pour les nombres complexes :

1-Sous la forme dite rectangulaire : $z = a + jb$ et $z = (a, b)$, nous n'utiliserons que la première écriture.

2-Sous la forme polaire, $z = \rho \cdot e^{j\theta}$ ou $\rho \angle \theta$, ainsi que $z = (\rho, \theta)$, nous n'utiliserons aussi que la première écriture, dite exponentielle, elle est due à Euler. : $z = a + jb = \rho \cdot e^{j\theta}$


La mesure du module de z , notée $|z|$, ainsi que ρ , la lettre grecque est donnée par le théorème de Pythagore ou le produit avec le conjugué : $|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot z^*}$

Où z^* est le conjugué de z dont la définition sera vue plus loin.

l'argument (angle) est donné

par théta : $\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ à $2k\pi$ près.

Remarque amusante : Le professeur Feynman (prix Nobel de physique et grand pédagogue, professeur à Caltech) estimait que la plus belle équation des maths était la suivante :
avec cinq constantes mathématiques particulières, elle est belle, mais elle ne sert à rien, seulement vous aider à comprendre les nombres complexes et c'est déjà ça !

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$


Exercices : $z_1 = 1 + j = \rho \cdot e^{j\theta}$ déterminez la valeur du module et de l'argument.

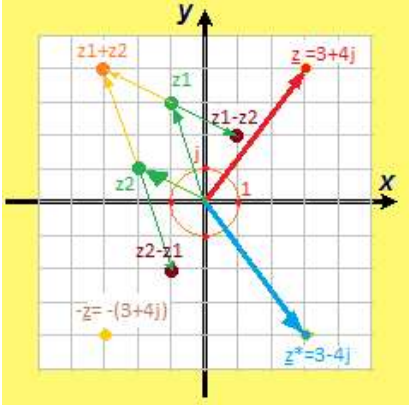
De même pour : $z_2 = -1 + j$, $z_3 = e^{j \cdot \pi/2}$, $z_4 = e^{j \cdot \pi/6}$

Sol : $z_1 = (1/\sqrt{2}) \cdot e^{j \cdot \pi/4}$ à $2k\pi$ près, $z_2 = -1 + j = (1/\sqrt{2}) \cdot e^{j \cdot 3\pi/4}$ à $2k\pi$ près, $z_3 = j$, $z_4 = \frac{1}{2} + j\sqrt{3}/2$

Egalité : Pour que deux nombres complexes soient égaux, ils doivent avoir les mêmes parties réelles **et** les mêmes parties imaginaires ou même module **et** même argument à $2k\pi$ près. $a_1 + jb_1$

Opérations avec les nombres complexes : L'écriture rectangulaire, $z = a + jb$, est bien adaptée aux opérations d'addition, soustraction ou multiplication par un coefficient constant, l'écriture polaire, $z = \rho \cdot e^{j\theta}$, est plus adaptée aux multiplications et divisions entre nombres complexes, aux calculs les puissances, racines et autres.

Addition et différence de deux nombres complexes : la figure ci-dessus illustre l'exemple du conjugué z^* et l'inversion du signe de z , ainsi que la somme et la différence de deux nombres complexes z_1 et z_2 .

$z_1 = a_1 + j b_1 \text{ et } z_2 = a_2 + j b_2$ <p>Addition, soustraction :</p> $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$ $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2)$ $z_2 - z_1 = -(z_1 - z_2)$ <p>Inversion du signe (-z) :</p> $z = a + j b = \rho \cdot e^{j\theta}$ $-z = -a - j b = \rho \cdot e^{j(\theta + \pi)}$ $\text{car } e^{j\pi} = -1$	
---	---

Conjugué (z^*): même partie réelle, mais partie imaginaire de signe opposé.

$$z = a + j b = \rho \cdot e^{j\theta}; \quad z^* = a - j b = \rho \cdot e^{-j\theta} \quad \text{avec} \quad a = \frac{1}{2}(z + z^*); \quad b = \frac{1}{2j}(z - z^*)$$

Multiplication : $z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot e^{j\theta_1} \cdot \rho_2 \cdot e^{j\theta_2} = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$ qui donne en coordonnées rectangulaires:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + j b_1) \cdot (a_2 + j b_2) = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + j \cdot (a_1 \cdot b_2 + b_1 \cdot a_2)$$

$$z^* z^* = |z|^2 = \rho^2$$

Division, si $|z_2| \neq 0$, on a : $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 \cdot e^{j\theta_1}}{\rho_2 \cdot e^{j\theta_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$ qui donne en coordonnées rectangulaires :

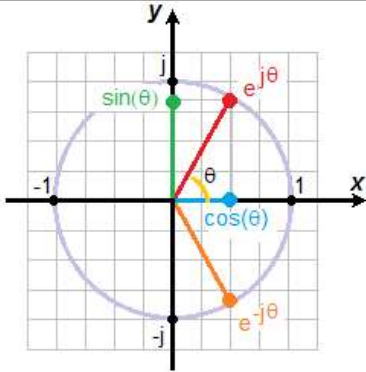
pour retrouver la partie réelle et imaginaire d'une fraction de nombres complexes ou un rapport de deux fonctions, on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur, le dénominateur devient réel et l'identification devient simple :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + j b_1}{a_2 + j b_2} = \frac{(a_1 + j b_1)(a_2 - j b_2)}{(a_2 + j b_2)(a_2 - j b_2)} = \frac{(a_1 + j b_1)(a_2 - j b_2)}{a_2^2 + b_2^2} = \left(\frac{a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2}{a_2^2 + b_2^2} \right) + j \cdot \left(\frac{b_1 \cdot a_2 - a_1 \cdot b_2}{a_2^2 + b_2^2} \right)$$

Quotient de deux nombres complexes :

$$z = \frac{a + j \cdot b}{c + j \cdot d} = \frac{(a + j \cdot b) \cdot (c - j \cdot d)}{(c + j \cdot d) \cdot (c - j \cdot d)} = \frac{(a + j \cdot b) \cdot (c - j \cdot d)}{c^2 + d^2} = \frac{(a \cdot c + b \cdot d)}{c^2 + d^2} + j \cdot \frac{(b \cdot c - a \cdot d)}{c^2 + d^2}$$

Argument, formule d'Euler : si l'argument varie de 0 à 2π , nous parcourons un cercle complet. Pour des arguments supérieurs à 2π , nous parcourons à nouveau ce même cercle, on définit donc l'angle avec un argument modulo 2π . L'expression α modulo $2\pi = \theta$ signifie que l'on garde le reste (θ) de la division entière de α par 2π .

<p>Un nombre complexe $z = \rho \cdot e^{j\theta}$ est toujours défini à $2k\pi$ près, avec k entier quelconque, on doit donc le désigner si possible avec ce terme : $z = \rho \cdot e^{j(\theta + 2k\pi)}$, en particulier dans le cas du calcul des racines n-ièmes.</p>		$e^{j\theta} = \cos \theta + j \cdot \sin \theta \quad \text{Euler}$ $e^{-j\theta} = \cos \theta - j \cdot \sin \theta \quad \text{son inverse}$ <p>La somme des deux amène à :</p> $\cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$ <p>La différence amène à :</p> $\sin \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$
---	---	---

La mesure du module de \underline{z} , notée aussi par la lettre grecque **rho** : ρ , est donnée par le théorème de Pythagore ou le produit avec le conjugué : $|\underline{z}| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\underline{z} \cdot \underline{z}^*}$ l'argument (angle) est donné par $\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ à $2k\pi$ près.

Rotation d'un angle θ quelconque : $\underline{z}_1 \xrightarrow{\text{rotation}} \underline{z}'_1 = \underline{z}_1 \cdot e^{j\theta}$ pour $\theta = \pi/2 \xrightarrow{\text{rotation}} e^{j\theta} = e^{j\pi/2} = j$ et pour :

$\theta = \pi \xrightarrow{\text{rotation}} e^{j\theta} = e^{j\pi} = j^2 = -1$ on retrouve $j^2 = -1$; $j^3 = -j$; $j^4 = 1$... $j^{-1} = \frac{1}{j} = -j$ **Formule de**

Moivre : $e^{jn\theta} = (\cos n\theta + j \sin n\theta) = (e^{j\theta})^n = (\cos \theta + j \sin \theta)^n$, formule valable pour tout n entier relatif (positif ou négatif). Elle présente beaucoup d'intérêt en mathématique, elle est présentée ici parce que Moivre est un champenois ! F5KOB

Puissance et racines d'un nombre complexe. Pour $n > 1$, on a : $\underline{z}^n = \rho^n \cdot e^{jn \cdot \theta}$ Pour la recherche des racines n -ièmes :

$r = \sqrt[n]{\underline{z}}$, il existera n solutions qui portées à la puissance n redonne \underline{z} , il faut donc définir \underline{z} à $2k\pi$ près :

$\underline{z} = \rho \cdot e^{j(\theta + 2k\pi)}$, d'où $\sqrt[n]{\underline{z}} = \sqrt[n]{\rho \cdot e^{j(\theta + 2k\pi)}} = \sqrt[n]{\rho} \cdot e^{j\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)}$

$\sqrt[2]{4} = \sqrt[2]{4 \cdot e^{j2k\pi}} = \sqrt[2]{4} \cdot e^{\frac{j2k\pi}{2}} = 2 \cdot e^{jk\pi}$, $\left\{ \begin{array}{l} k=0, r_1 = 2 \cdot e^0 = 2 \\ k=1, r_2 = 2 \cdot e^{-\pi} = -2 \end{array} \right.$

Exemple :

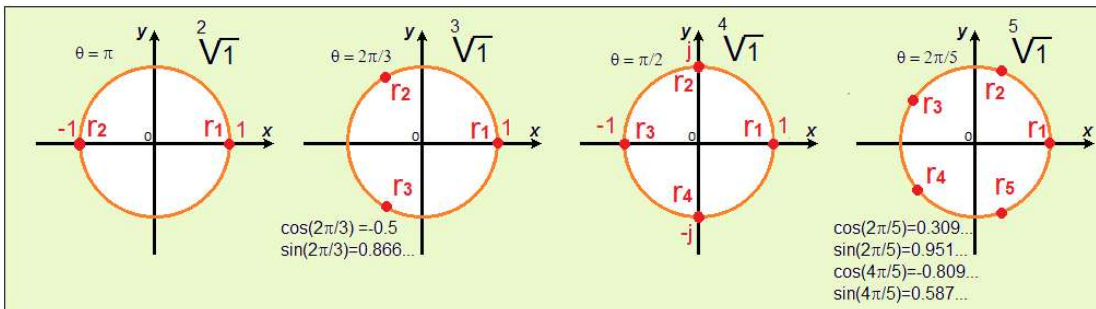
On vérifie facilement que ces deux

solutions élevées au carré redonnent 4.

Racines n -ièmes de l'unité : $r_n = \sqrt[n]{1}$ ce calcul apparait souvent en électronique, comme par exemple pour dimensionner un filtre de Butterworth, il apparait aussi très fréquemment en filtrage numérique et dans les transmissions numériques.

$r_n = \sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{1 \cdot e^{j(0 + 2k\pi)}} = e^{j \cdot 2k\pi/n}$

, il reste à faire varier k de 0 à $n-1$ pour évaluer les n différentes racines. Le fait de souligner le chiffre rappelle, ici, qu'il est complexe et non souligné que c'est le module.

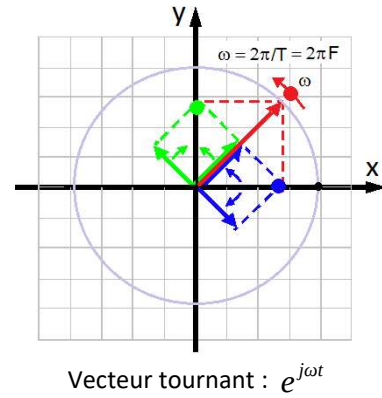


Argument variable : faisons varier, à vitesse constante, l'angle du vecteur dans le sens trigonométrique positif

Pour illustrer la forme de l'expression d'Euler, nous faisons varier l'angle linéairement dans le temps avec une pulsation angulaire $\omega=2\pi f$ constante :
 $\underline{z} = e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \cdot \sin(\omega t)$, la trajectoire de $\underline{z}(t)$ est un cercle et comme le rayon ρ est de 1, c'est exactement le cercle trigonométrique.

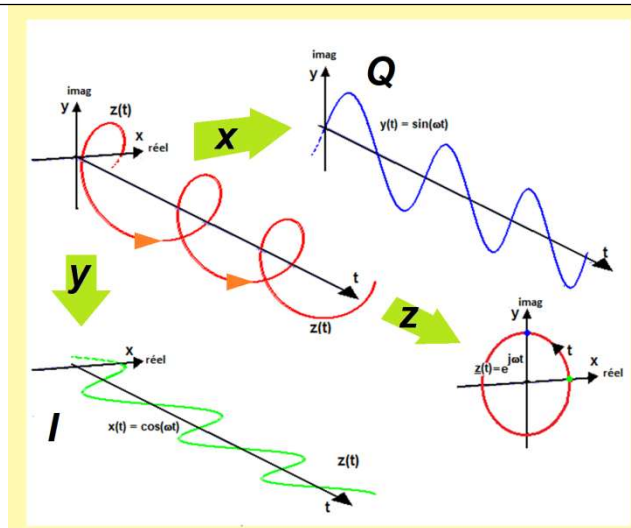
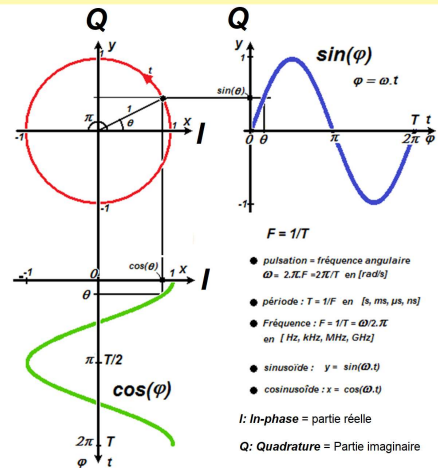
$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \cdot \sin \omega t \quad \cos \omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$$

$$\sin \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$



Nombres complexes en génie électrique : Sinusoïde, cissoïde en fonction du temps

La projection sur les deux axes décrit une sinusoïde et une cosinusoïde et inversement dans les figures de Lissajous avec un oscilloscope, deux sinusoïdes en x et en y déphasées de $\pi/2$ décrivent un cercle. L'angle instantané θ en [rad] évolue constamment. La mesure de la période T en [s], nous renseigne sur la fréquence $F=1/T$ en [Hz= s^{-1}] et la fréquence angulaire $\omega=2\pi F$ (pulsation) en [rad/s]. Si l'angle de départ est nul, on a à chaque instant $\theta=\omega t$, la périodicité angulaire est de 2π .



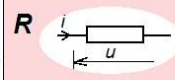
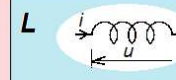
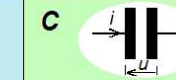
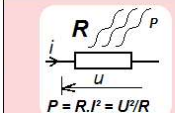
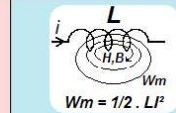
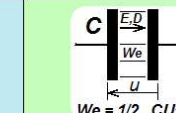
Cissoïde complexe I & Q

L'association des deux signaux sinus et cosinus donne la cissoïde qui est un signal complexe comme on en rencontre dans les modulations numériques avec les termes I et Q.

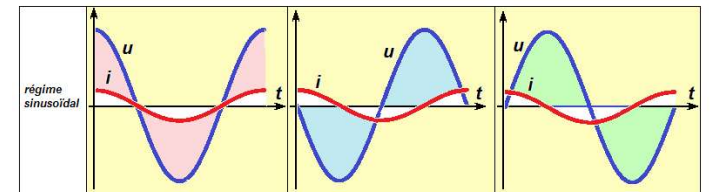
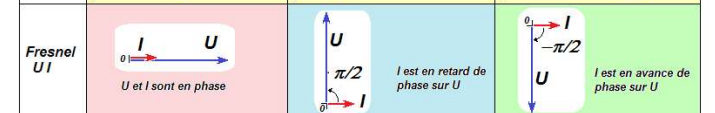
- I : In phase = partie réelle
- Q : Quadrature phase = partie imaginaire

Les composants **RLC** et leur impédance complexe : résistances, inductances et capacités.


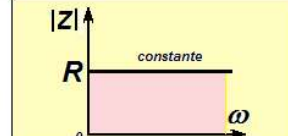
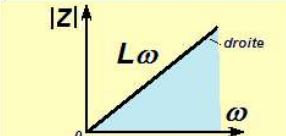
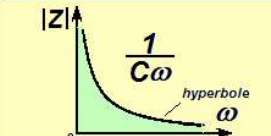
Si on applique à ces composants des tensions ou des courants sinusoïdaux de valeurs raisonnables pour ne pas atteindre leurs limites (échauffement excessif, saturation, claquage), on peut admettre qu'ils seront soumis aux lois physiques de base. Pour une résistance, courant et tension seront en phase et toute la puissance fournie est transformée en chaleur, le composant s'échauffe.

<p>Pour les inductances, la tension est proportionnelle aux variations du courant et elle oppose une impédance qui augmente avec la fréquence, le courant sera toujours en retard par rapport à la tension, ce sont des inerties en courant. L'inductance ne consomme pas de puissance, elle stocke de l'énergie magnétique dite réactive qu'elle restituera.</p>	<p>symbole convention de signe</p> 	<p>Inductor symbol L with current i and voltage U</p> 	<p>Capacitor symbol C with current i and voltage U</p> 
	<p>équation</p> <p>$u = R \cdot i$</p>	<p>$u = L \cdot di/dt$</p>	<p>$i = C \cdot du/dt$</p>
	<p>puissance énergie</p>  <p>R est dissipatif, $U, I \rightarrow P$ P thermique (effet Joule) ou rayonnement électromagnétique</p>	 <p>L est une inertie en courant stockage d'énergie magnétique $I \rightarrow H, B \rightarrow Wm$</p>	 <p>C est une inertie en tension stockage d'énergie électrique $U \rightarrow E, D \rightarrow We$</p>

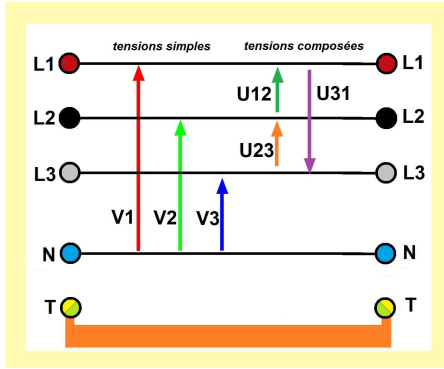
Les capacités, matérialisées par les condensateurs consomment un courant proportionnel aux variations de la tension et elles opposent une impédance qui décroît avec la fréquence, le courant sera toujours en avance de phase, ce sont des inerties en tension. La capacité ne consomme pas de puissance, elle stocke de l'énergie électrique dite réactive qu'elle restituera, mais de signe opposé à celle de l'inductance.

<p>La représentation de Fresnel se fait dans le plan complexe en prenant, ici le courant comme référence donc sur l'axe des réels. Pour les impédances inductives la tension est en avance de $\pi/2$, pour les impédances capacitatives, en retard de $\pi/2$.</p>	<p>régime sinusoïdal</p> 
	<p>Fresnel U I</p>  <p>U et I sont en phase</p> <p>I est en retard de phase sur U</p> <p>I est en avance de phase sur U</p>

L'axe imaginaire positif pour les impédances inductives et la partie négative pour les impédances capacitatives.

<p>Fresnel impédance</p>  <p>R est indépendant de la fréquence</p>	<p>Inductive impedance $jL\omega$</p> <p>$\omega = \text{cste}$</p> <p>L'impédance croît avec la fréquence</p> <p>$\omega = 2\pi \cdot F$ en [rad/s]</p>	<p>Capacitive impedance $1/jC\omega$</p> <p>$\omega = \text{cste}$</p> <p>L'impédance décroît avec la fréquence</p> <p>$\omega = 2\pi \cdot F$ en [rad/s]</p>
<p>Module $Z(\omega)$</p>  <p>constante</p>	 <p>droite</p>	 <p>hyperbole</p>

Tensions triphasées : à résoudre seulement si vous avez des connaissances de base en électrotechnique. On ne vous demandera pas ici si vous avez les certificats d'habilitations BT concernant la sécurité électrique !



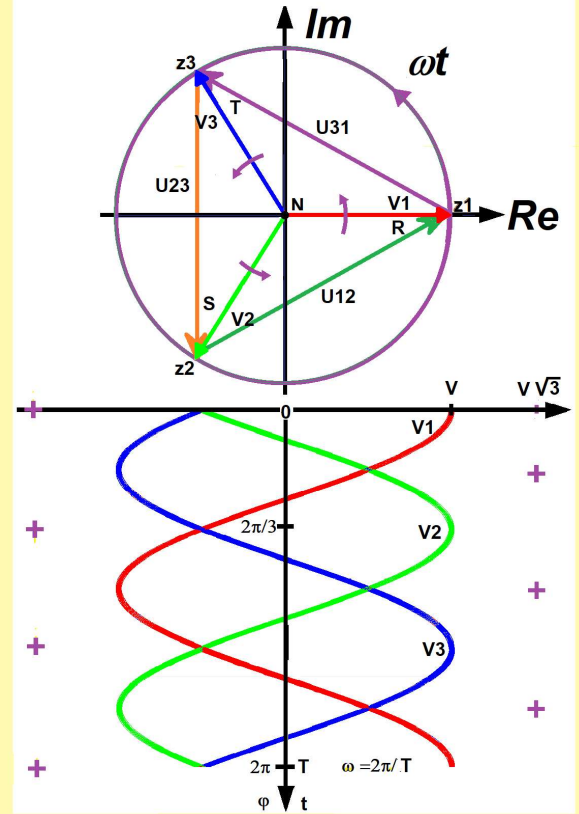
On considère trois vecteurs tournants représentant une alimentation triphasée d'amplitude crête V et de fréquence $F=1/T$. Le cercle complexe a un rayon mesurant l'amplitude crête V des tensions sinusoïdales.

Donnez l'expression des trois grandeurs complexes $Z1$, $Z2$ et $Z3$ des extrémités des vecteurs.

Ces vecteurs sont tournants de pulsation ω . Donnez l'expression complexe de ces vecteurs.

La tension "simple" apparaissant entre le neutre N et chacune des lignes $L1$, $L2$ et $L3$ est la partie réelles de ces vecteurs, donnez pour chacune son expression mathématique.

Les tensions entre phase donnent les valeurs "composées" : $U12=V1-V2$, etc. En remarquant que la différence $Z1-Z2$ conduit au calcul. Donnez l'expression complexe de ces trois tensions composées puis leur valeur réelle.



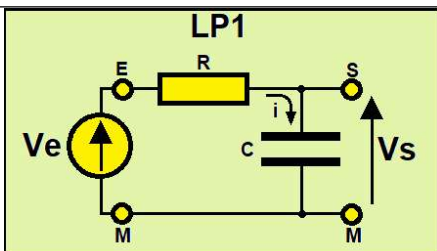
Quelle sera la valeur crête des tensions composées ?

Complétez le graphe des sinusoïdes représentant les trois tensions composées.

A quoi peut servir la connaissance des nombres complexes pour un électronicien ou un radioamateur ?

Le texte présenté ici n'a pas pour prétention de vous permettre d'accéder à la maîtrise du sujet abordé, mais d'avoir un aperçu des possibilités offertes, une étude plus progressive et plus complète serait nécessaire si cela vous semble nécessaire, il y a de nombreux sites sur internet pour combler ce désir !

L'étude du filtre passe-bas du premier ordre RC du type LP1 : c'est le plus simple des filtres, il va nous permettre de faire un tour d'horizon de ce que les mathématiques des nombres complexes nous permettront d'aborder sereinement.



$$v_e = v_s + RC \frac{dv_s}{dt}$$

Avec les notations Intuitivement, on sait qu'un condensateur a une impédance qui décroît avec la fréquence et qu'il va faire chuter la tension V_s en haute fréquence et ainsi limiter le transfert de ces signaux, par contre une tension V_e de très basse fréquence sera transmise pratiquement intégralement, c'est donc un filtre passe-bas. Il est dit du premier ordre car il

$$i = C \frac{dV_s}{dt}, \quad v_e - v_s = Ri = RC \frac{dV_s}{dt}$$

L'étude du circuit avec la loi des mailles et les lois électriques des composants, nous permet d'élaborer l'équation différentielle qui lie la tension de sortie à celle d'entrée :

ne possède qu'un seul composant réactif C. L'approche est plus complète avec un peu de calcul mathématique : la loi du courant imposé par le condensateur et la loi des tensions dans une maille fermée et l'équation dite différentielle est élaborée : complexes, l'opération dérivée est remplacée par la variable imaginaire $j\omega$ et l'équation différentielle est remplacée par une simple équation algébrique :

$$d./dt \rightarrow j\omega$$

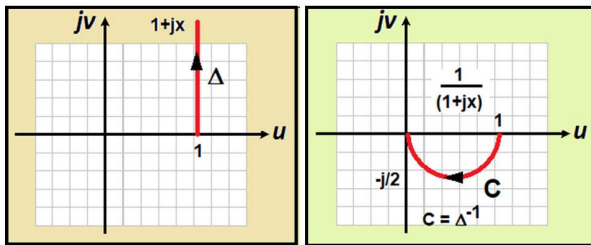
$$V_e = V_s + RC \cdot j\omega \cdot V_s$$

Nous aboutissons ainsi à la fonction de transfert en régime harmonique :

$$H(j\omega) = \frac{V_s}{V_e} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

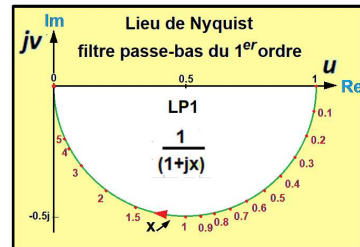
L'étude peut se faire aisément en posant $x = RC\omega$ que l'on appellera fréquence réduite et $f_1(x) = 1 + j \cdot x$, puis

$$f_2(x) = \frac{1}{1 + j \cdot x} \text{ image de la fonction de transfert à étudier.}$$



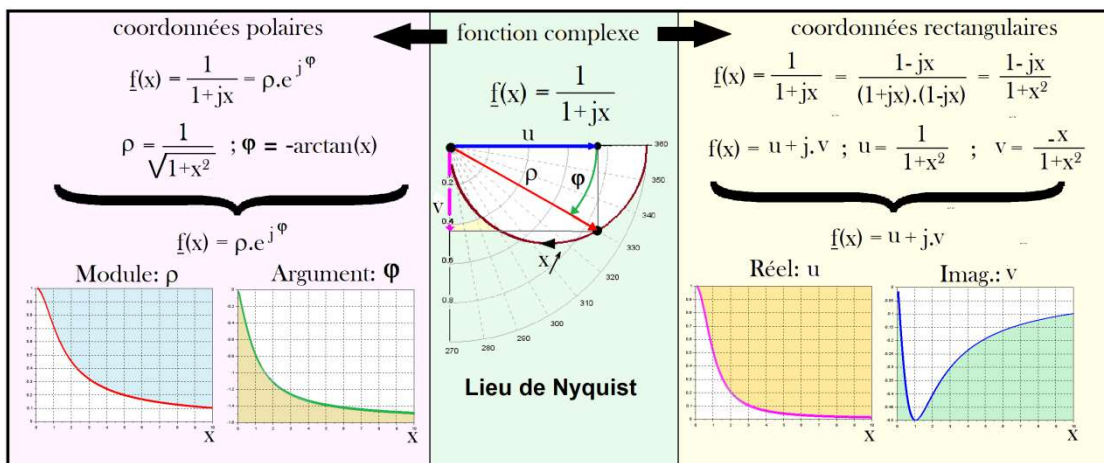
L'inversion homographique de la demi-droite Δ permet d'obtenir le demi-cercle C.

Nous obtenons le lieu de Nyquist de ce filtre :



La courbe de Nyquist permet d'évaluer ou de construire facilement la courbe de réponse du module $|H(jx)|$ et celle de l'argument (déphasage) $\varphi(jx)$, comme ci-dessous. L'étude directe du module et de l'argument à partir de l'équation de la fonction de transfert donne directement le même résultat :

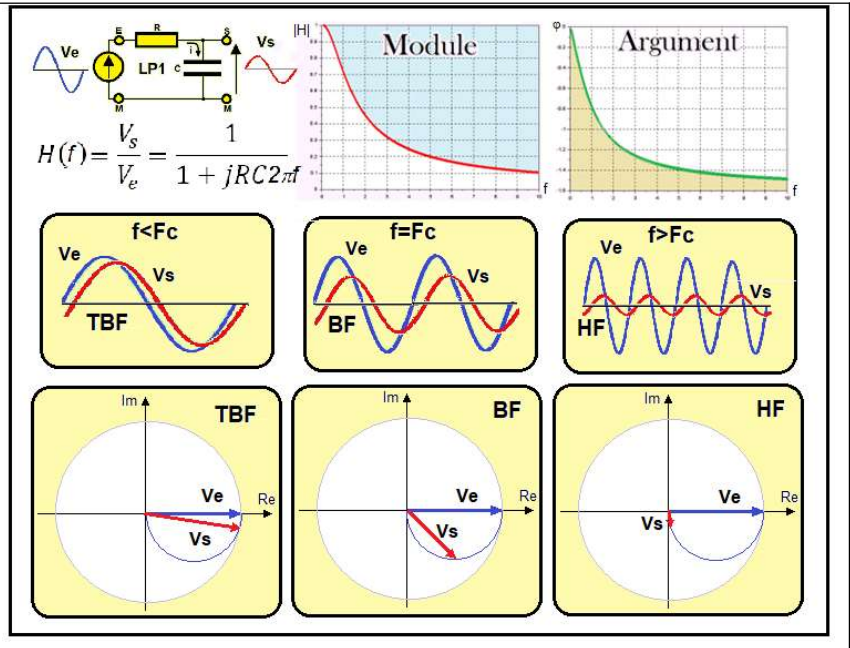
$$|f(jx)| = \sqrt{\Re^2 + \Im^2}, \quad \arg(f(jx)) = \varphi = \arctan\left(\frac{\Re}{\Im}\right).$$



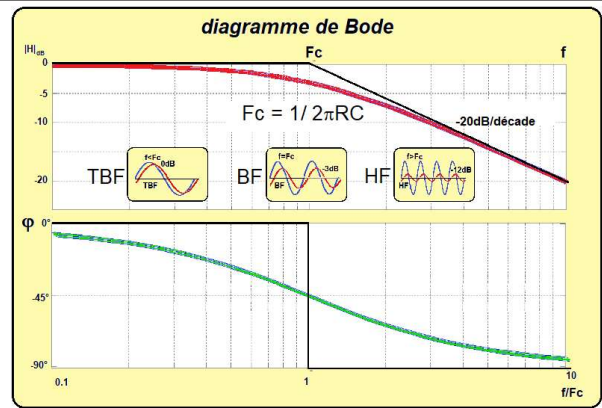
Nous obtenons ainsi deux types de graphes cartésiens, en coordonnées rectangulaires : partie réelle et partie imaginaire en fonction de la fréquence et en coordonnées polaires : module (amplitude) et argument (phase) en fonction de la fréquence. La courbe module en fonction de la fréquence donne une bonne image de la nature du filtrage et elle est à rapprocher du raisonnement intuitif.

Mesure et analyse vectorielle :

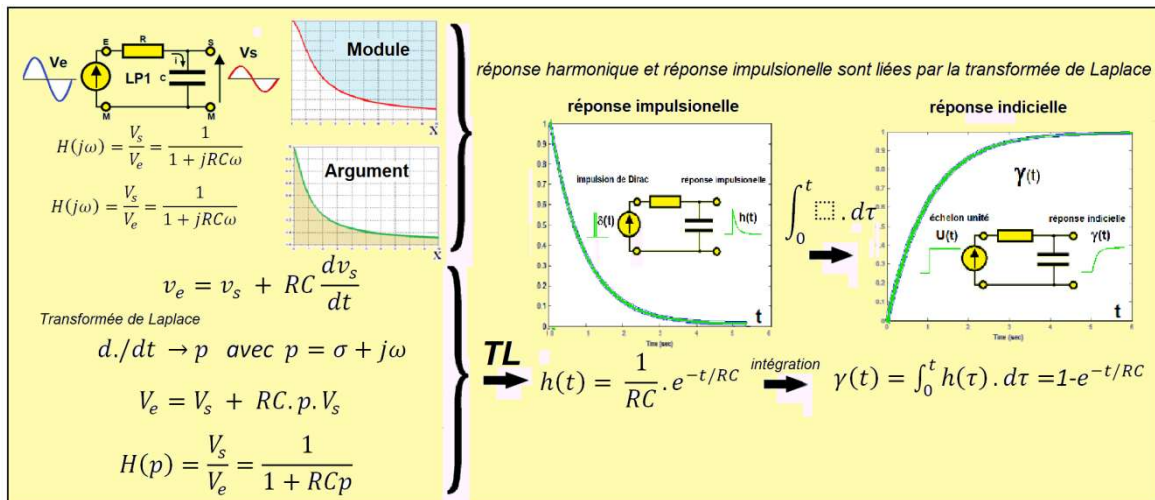
Pour mesurer physiquement la courbe de réponse du circuit RC du type LP1, il faut disposer d'une source sinusoïdale à fréquence variable et à l'aide d'un oscilloscope deux voies observer les signaux V_e et V_s selon la fréquence. En maintenant l'amplitude de V_e constante, la variation de V_s est à l'image de la courbe du module et le retard de phase à celle de l'argument. La qualité de la mesure sera améliorée avec l'emploi d'un voltmètre électronique et d'un phasemètre. Des outils plus performants comme, le transféromètre, la détection synchrone pour limiter les erreurs dues au bruit et surtout les analyseurs vectoriels (VNA) ont fait leur apparition. La dernière série de graphes illustre la mesure vectorielle et le lien avec le graphe de Nyquist.



L'emploi des diagrammes de Bode pour définir la courbe de réponse donnera des résultats plus précis et plus exploitables avec une plus grande dynamique en amplitude avec les décibels (dB) et l'axe des fréquences sur une échelle logarithmique. Les électroniciens ont mis au point plusieurs méthodes de résolution graphique pour traiter pratiquement toutes les types de filtre. Les diagrammes de Bode en premier associés au diagrammes de Nyquist ou cartésiens si nécessaire, la méthode dite des pôles et des zéros (CPZ) qui est très performante et particulièrement en filtrage numérique.



Autour des nombres complexes, les mathématiciens ont élaborés des théories comme les séries de Fourier et la transformée de Fourier pour calculer le spectre en fréquence des signaux, et la transformée de Laplace qui permet d'étudier les fonctions de transfert des filtres mécaniques ou électriques. Ces transformations sont des fonctions de la variable complexes et feront l'objet d'autres présentations. La transformée de Laplace avec $p = \sigma + j \cdot \omega$ permet de connaître la réponse harmonique d'un filtre, ses réponses impulsionnelles à des percussions électriques ainsi que les réponses à d'autres signaux, cela est illustré succinctement avec la figure suivante.



En électronique numérique (filtrage DSP, modulation et transmissions numériques) ou en automatique échantillonnée, les systèmes sont décrits non plus par des équations différentielles classiques, mais par des équations dites aux différences finies. On utilise la transformée en z de Jury : $\underline{z} = x + jy$

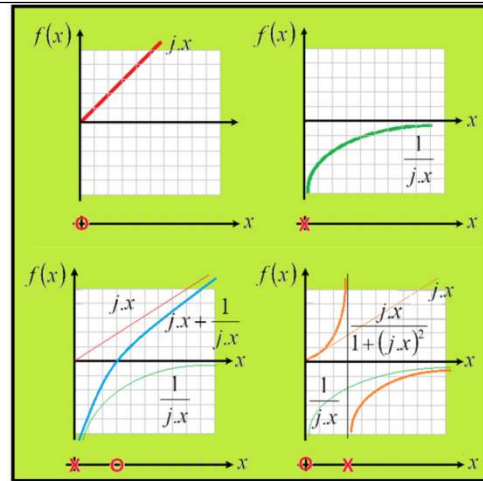
Nous n'en dirons pas plus sur ce sujet qui nécessite une étude particulière à part.

Calcul des impédances complexes : Nous partons des mathématiques pour aller ensuite vers le calcul des circuits

L'étude des fonctions $f(x)$ représente une partie importante des programmes de mathématique au lycée, souvent la variable est une grandeur réelle, mais elle peut aussi être imaginaire pure, ce sera notre première approche, elle peut aussi être complexe avec des applications importantes dans nos techniques.

Fonction d'une variable imaginaire pure : $f(x) = j \cdot x$, $f(x) = \frac{1}{j \cdot x}$, $f(x) = j \cdot x + \frac{1}{j \cdot x}$, $f(x) = \frac{j \cdot x}{1 + (j \cdot x)^2}$

Sous certaines conditions la fonction est elle aussi imaginaire pure, elle ne possède pas de partie réelle. Ces fonctions sont rencontrées lors de l'étude de l'impédance de circuit ne possédant que des inductances et des condensateurs (dipôles LC) et sont épaulées par le théorème de Foster, un chapitre sera réservé à leur étude. Ces fonctions sont toujours croissantes avec éventuellement des asymptotes, leur valeur peut passer en zéro ou asymptotiser vers l'infini, ces valeurs particulières de x s'appellent alors des zéros \circ ou des pôles \times et amènent à une théorie très importante dans l'étude des impédances et des filtres, celle dite des pôles et des zéros.



Nous illustrerons cette présentation avec l'étude de l'impédance de dipôle ne possédant que des inductances et des condensateurs et pas d'éléments dissipatifs comme les résistances. Selon la structure du schéma, ces dipôles obéissent au théorème de Foster, celui-ci sera abordé dans une autre présentation.

L'inductance seule :

$$Z = jL\omega$$

La capacité seule :

$$Z = \frac{1}{jC\omega}$$

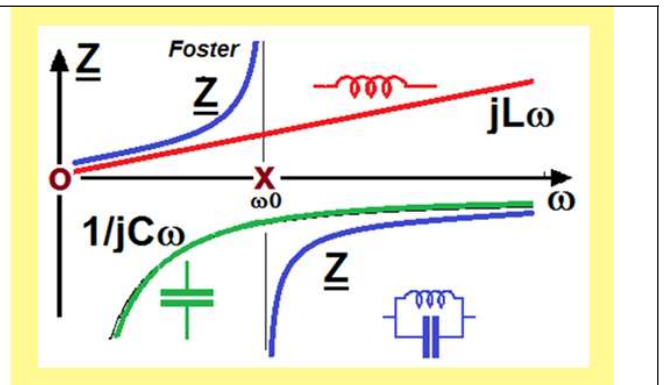
Le circuit LC parallèle (Bouchon) :

$$Z = jL\omega // (1/jC\omega)$$

$$Z = \frac{jL\omega}{1 + LC(j\omega)^2}$$

On obtient une résonance d'impédance infinie à

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$



Intuitivement on retrouve le résultat : pour un circuit LC parallèle l'inductance est dominante aux basses fréquences et courtcircuite le condensateur à la fréquence nulle, l'impédance du circuit LC suit l'évolution de l'inductance seule. Aux très hautes fréquences, le condensateur devient un courtcircuit pour l'inductance et l'impédance du circuit LC tend à être celle du condensateur seul si la fréquence croît.

Autre exemple de mise en œuvre de Foster : le quartz

	<p>Le quartz qui est utilisé comme résonateur de grande précision dans les oscillateurs électroniques possède, si on néglige la résistance série, le schéma équivalent L, C, Co. L'emploi du théorème de Foster donne rapidement le résultat, la résonance série est due à L et C, la résonance parallèle à L mis en parallèle avec C série Co. L'oscillateur électronique (montage à transistor) qui fera vibrer ce quartz travaillera à une fréquence située entre ces deux fréquences série et parallèle, dans la zone inductive et selon le schéma et la valeur de ces composants. Le quartz travaillera à une fréquence précise si on respecte la valeur de la capacité de charge donnée par son fabricant.</p>
--	--

Calcul des circuits d'adaptation, elle utilise évidemment les nombres complexes. Ces circuits sont utilisés en sortie d'émetteur avant l'antenne d'émission, à l'entrée des étages RF, etc.

<p>Circuits d'adaptation : pour modifier l'impédance apparente d'une charge résistive comme une antenne et adapter le circuit à une meilleure charge on utilise un transformateur d'impédance magnétique type balun, unun ou bien un circuit du type LC (Pi, Te match)</p>	
--	--

Une méthode graphique qui s'appuie sur la construction de Fresnel dans le plan complexe permet de résoudre ce type de problème.

<p>$R_c > R$</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> <p>$f = 28,415 \text{ MHz}$ $R_c = 75 \Omega$ $R = 50 \Omega$ $L = ? \quad C = ?$</p> </div>		
--	--	--

La résolution se fait graphiquement sur une feuille millimétrée avec des axes orthonormés, règle et compas. L'ordre de construction : 1 pour R_c , 2 pour R , 3 le cercle de rayon $R_c/2$ centré à $R_c/2$, 4 le segment perpendiculaire en R qui coupe le cercle, 5 la projection sur l'axe des imaginaire qui définira la valeur de l'inductance L et 6 la droite qui aligne les trois points 1,4,6 et qui définira la valeur de la capacité C . Cette méthode sera décrite et commentée dans une autre présentation, elle est donnée ici juste pour l'illustration et aiguïser votre appétit de connaissance !

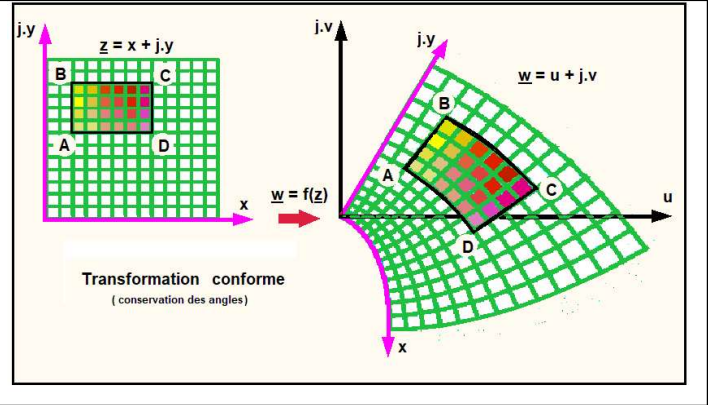
Solution : $X_c' = X_L = 35 \Omega$ avec $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 178.10^6 \text{ rad/s}$, $L = 196.10^{-9} \text{ H} = 196 \text{ nH}$, $X_c = 105 \Omega$, $C = 53.10^{-12} \text{ F} = 53 \text{ pF}$

Résoudre le même problème à 3,752 MHz, solution : $L = 1,48 \mu\text{H}$ et $C = 403 \text{ pF}$

La limite des résolutions sont celles du graphisme et de la précision du dessin, si le rapport des résistances devient trop grand, il vaut mieux utiliser une résolution par abaque de Smith.

Fonctions de la variable complexe : c'est un chapitre des mathématiques très important, il a été développé par Cauchy au XIX^{ème} siècle. On retrouve son implication dans l'étude de la stabilité des systèmes bouclés en automatique et en électronique, nous n'aborderons pas ici cet aspect.

Transformations conformes : il s'agit d'appliquer à l'ensemble des valeurs complexes $z = x + j.y$ représentant un plan infini, une fonction $w = f(z)$ qui sera elle-même une variable complexe $w = u + j.v$ dans un plan infini. Selon l'expression mathématique de la fonction, la transformation peut être conforme, c'est à dire si à chaque point du plan de départ correspond un seul point du plan d'arrivée et réciproquement (bijection) et s'il y a respect de la valeur des angles et des orientations successives quand on choisit un parcours fermé comme par exemple ABCD sur la figure voisine.

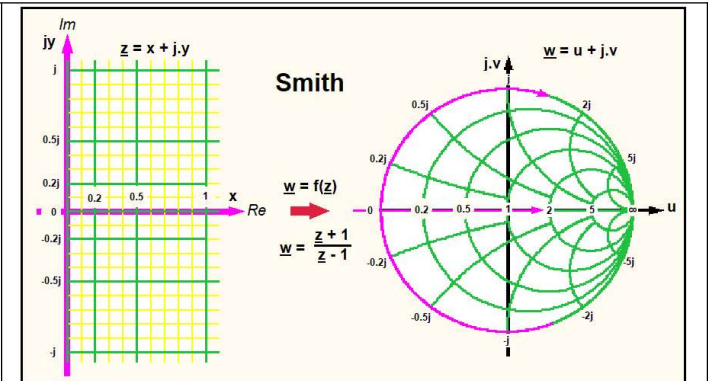


L'abaque de Smith : la transformation conforme qui nous est le plus utile est celle qui amène à l'abaque de Smith. Celui-ci permet d'étudier les montages comportant des impédances complexes localisées (R,L,C, ...) ou des impédances à composante répartie (lignes, guides d'onde et antennes). C'est un monogramme inventé en 1937 par Philipp Smith au Bell-Labs son emploi permet de calculer essentiellement les circuits d'adaptation dans les lignes de transmission, il est toujours d'actualité et il est utilisé dans les logiciels CAO RF comme dans la présentation des mesures avec les VNA.

Le plan d'origine est celui des impédances complexes, c'est un plan infini qui correspond à celui utilisé précédemment avec les diagrammes de Fresnel. Dans la grande majorité des problèmes on utilise que le demi-plan avec la partie réelle positive, seuls les amplificateurs ayant une stabilité conditionnelle et les oscillateurs peuvent présenter des résistances négatives et avoir leur image à gauche. Tout ce demi-plan infini aura, après transformation de Smith, son image enfermée dans un cercle, donc de surface finie, on pourra donc résoudre les cas d'impédances très grandes, de zéro à l'infini en réel comme en imaginaire.

La transformation est la suivante : $w = f(z) = \frac{z-1}{z+1}$.

La nouvelle variable w définit un nouveau plan complexe infini possédant une partie réelle et une partie imaginaire $= u + j.v$. Le choix de cette transformation est très pertinent de la part de son inventeur car c'est aussi la même expression que celle du coefficient de réflexion des lignes désadaptées. Tout le demi-plan d'origine situé à droite (partie réelle positive) est projeté à l'intérieur du cercle, l'extérieur de ce cercle est l'image du demi plan gauche, celui à partie réelle négative et qu'on utilise peu. Les droites horizontales et verticales du plan d'origine, liées aux graduations sont orthogonales entre elles, leur image dans le plan transformé seront des cercles orthogonaux entre eux. La lecture des parties réelles et imaginaires se fera maintenant en suivant ces courbes curvilignes.



Les droites horizontales et verticales du plan d'origine, liées aux graduations sont orthogonales entre elles, leur image dans le plan transformé seront des cercles orthogonaux entre eux. La lecture des parties réelles et imaginaires se fera maintenant en suivant ces courbes curvilignes.

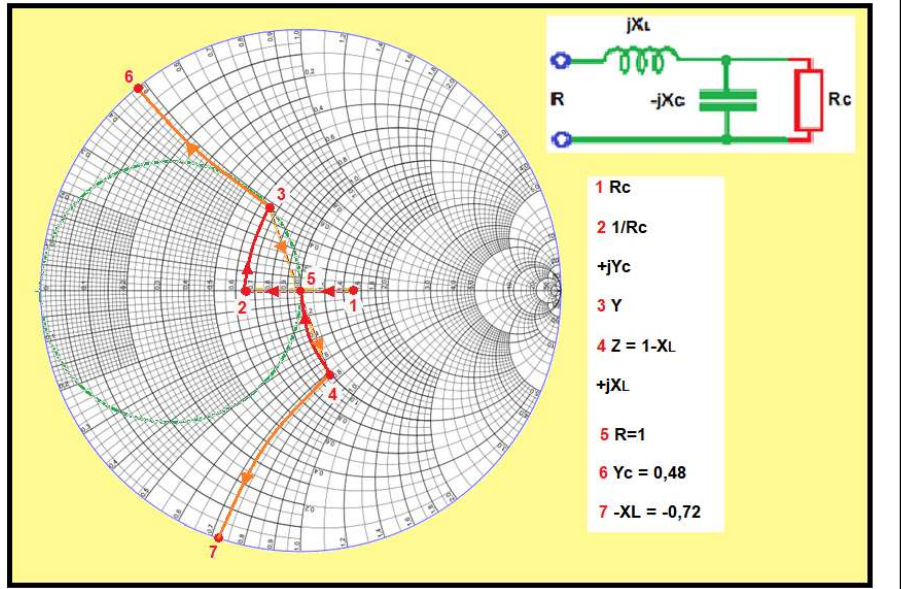
Vous pouvez vérifier facilement les valeurs de transformation des quelques points suivants en prenant

$$w = \frac{z-1}{z+1} \text{ avec } z = x + j.y \text{ et } w = u + j.v \text{ pour } z=0 \quad 1 \quad j \text{ et } -j \text{ et enfin } z = \infty$$

Exemple de calcul d'une adaptation avec l'abaque de Smith :

Ici aussi le calcul d'adaptation du même circuit est donné à titre indicatif pour aiguiser les appétits. L'étude de l'abaque de Smith fera l'objet d'une autre présentation. On travaille avec des grandeurs relatives (normalisées) en référence à une valeur, par exemple 50Ω , ce qui donne $R_c/50 = 1,5$ ect. L'inverse d'une grandeur relative se situe au point diamétralement opposé et comme nous travaillons avec des grandeurs localisées (L et C), les déplacements et lectures se font sur les axes curvilignes.

Le résultat final est identique à celui du diagramme de Fresnel.



Le choix de la transformation $w = f(z) = \frac{z-1}{z+1}$ est très pertinent de la part de son inventeur car c'est aussi la même expression que celle du coefficient de réflexion des lignes désadaptées $= \frac{z-1}{z+1}$. L'abaque de Smith permettra donc de connaître l'impédance et le niveau des signaux vue à travers un tronçon de longueur donnée ou variable comme le guide fendu ou en faisant varier la fréquence dans une bande donnée (emploi de l'analyseur vectoriel). Le calcul des circuits d'adaptations se fera essentiellement par impédances localisées ou par stubs (tronçons de ligne). L'abaque de Smith est aussi très présent dans le calcul des amplificateurs RF par les paramètres Y, Z et surtout S.

En espérant que cette lecture ne fut pas trop difficile et qu'elle vous a apporter des connaissances nouvelles

Nous sommes plusieurs à F5KOB à connaître F6BIM, Marc, il a donné des cours d'électronique au sein de notre radio-club, il a été mon professeur de mathématiques au lycée technique pendant les trois années de formation au bac électronique et c'est avec lui que j'ai abordé ce sujet pour la première fois vers 1970. Nous le saluons et lui adressons nos meilleurs 73 . Dominique F4AEM