

Les diagrammes de Fresnel en Radiofréquence

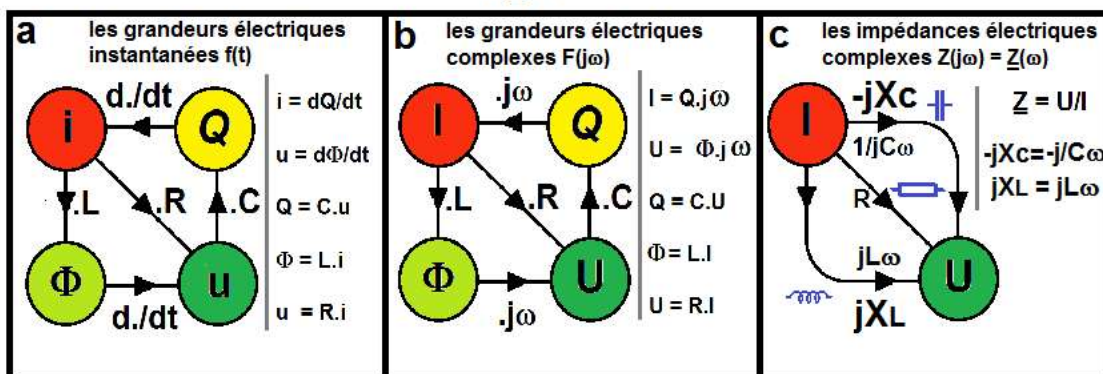
Avec nos outils informatiques, les méthodes graphiques semblent obsolètes, ce n'est probablement pas vrai, elles sont plutôt complémentaires et certains logiciels s'appuient sur une présentation et une résolution graphique comme avec l'abaque de Smith. Les constructions graphiques sont parfois en concurrence avec les résolutions algébriques en réalité elles vont de paire et se complètent, elles servent aussi à comprendre. Dans cette présentation, les diagrammes de Fresnel sont utilisés pour le calcul et les transformations d'impédance, ils donnent une vue complémentaire à une résolution purement algébrique. Les électrotechniciens utilisent de façon préférentielle ces constructions aussi bien pour le courant monophasé, triphasé, l'étude des machines que pour le transport de l'énergie en THT. Aux radiofréquences, ces diagrammes permettent une meilleure compréhension au niveau des schémas équivalents et permettent d'appréhender les circuits d'adaptation, ils permettront aussi d'aborder par la suite les abaques de Smith. Ceux-ci sont évidemment beaucoup plus performants, mais ils ne sont pas nécessairement simples à comprendre pour les novices, ce passage par les graphes cartésiens est donc une première étape. Les méthodes présentées ici ne sont pas très communes et peuvent dérouter le lecteur, si vous ne connaissez pas le sujet avant, une simple lecture rapide ne suffira pas, elles demandent une lecture progressive et approfondie avec un compas et un crayon à la main et un peu de réflexion !

1° Les composants R,L,C

1-1 les grandeurs électriques u, i, Q, Φ :

Les grandeurs électriques mises en œuvre sont représentées dans les diagrammes suivants (tétragone de Paynter), nous y trouvons deux variables d'état, la charge électrique **Q** et le flux magnétique totalisé **Φ** et comme dans tout les domaines de la physique une variable extensive (flux de matière) le courant **i** et une variable intensive (d'effort) la tension **u**. Ces quatre variables sont liées par cinq opérations de dérivée ou de multiplication. Celles-ci font apparaître trois types de composants, les résistances **R** qui donnent $u = R.i$, les inductances **L** qui donnent $u = L.di/dt$ et les capacités **C** qui donnent $i = C.du/dt$. Ces deux derniers composants présentent des relations en dualité, dans les équations il faut intervertir les grandeurs **u** et **i** ainsi que **L** et **C**.

fig.1



Nous disposons donc des trois types de composants passifs : **R**, **L** et **C**. Nous ne considérerons que des composants parfaits en vue de la modélisation d'ensemble plus complexe. Dans le cas d'un circuit

utilisant plusieurs inductances, elles seront considérées sans couplage magnétique entre elles, c'est-à-dire avec des inductances mutuelles nulles.

1-2 Phaseurs et sinusoïdes : Un signal sinusoïdal d'amplitude **A** peut être représenté par son graphe temporel et son équation réelle $y(t) = A \cdot \cos(\omega t + \phi)$, son équation complexe $\underline{y}(t) = A \cdot e^{j(\omega t + \phi)}$ ou par un vecteur tournant à la fréquence angulaire ω , associé à un nombre complexe (phaseur) $\underline{y} = A \cdot e^{j \cdot \phi}$ de module **A** et d'argument ϕ et dont la fréquence angulaire est sous-entendue mais pas notée. Ce phaseur sera représenté par un vecteur. L'écriture exponentielle provient de la notation complexe d'Euler $e^{j\theta} = \cos \theta + j \cdot \sin \theta$. Nous ne développerons pas d'avantage cette présentation supposée connue et facilement admise.

1-3 Résistances : Courant et tension sont en phase, la puissance électrique est dissipée en chaleur (effet Joule) ou rayonnée sous forme d'onde (antenne, haut-parleur). Les électrotechniciens emploient le terme de courant watté quand celui-ci est en phase avec la tension.

1-4 Inductances : Le courant crée un champ magnétique **B** de flux ϕ qu'il faut élaner. D'un point vue circuit électrique, le flux est totalisé : $\Phi = n \cdot \phi$, il est perçu par ses effets au travers des **n** spires. Ces inductances sont des inerties en courant, celui-ci ne peut évoluer que lentement, elles sont en quelque sorte des mémoires de courant, nous les utilisons en filtrage et lissage de courant. A cause de cette inertie, en régime sinusoïdal, le courant est en retard de $\phi = \pi/2$ par rapport à la tension. L'inductance présente une impédance $\underline{Z} = j \cdot X_L = j \cdot L\omega$, le **j** indique le déphasage de $\pi/2$. La puissance mise en œuvre est réactive, les électrotechniciens considèrent que les inductances consomment cette puissance réactive qui ne peut être fournie que par du capacitif, les courants réactifs sont dits non wattés.

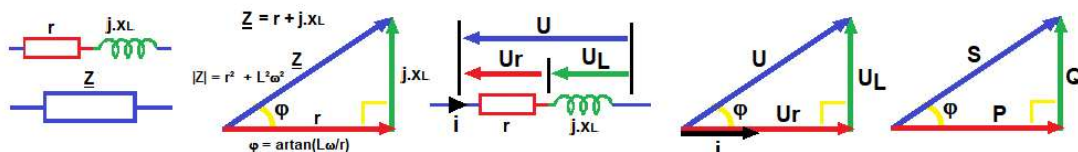
1-5 Capacités : Elles sont souvent matérialisées par des condensateurs. La tension crée un champ électrique dans l'isolant qu'il faut établir par déplacement de charges **Q**, ces condensateurs sont des inerties en tension, celle-ci ne peut évoluer que lentement. Ces capacités sont en quelque sorte des mémoires de tension, nous les utilisons en filtrage de tension. En régime sinusoïdal, la tension est en retard de $\phi = \pi/2$ sur le courant. Le condensateur présente une impédance $\underline{Z} = -j \cdot X_C = 1/j \cdot C\omega$. La puissance mise en œuvre est réactive, les électrotechniciens considèrent que les capacités fournissent cette puissance réactive.

Toutes ces informations sont rappelées dans le tableau suivant : (fig.2)

fig.2

symbole convention de signe			
équation	$u = R.i$	$u = L.di/dt$	$i = C.du/dt$
régime sinusoïdal			
Fresnel U I			
notation complexe	$\underline{U} = R. \underline{I}$	$\underline{U} = j.L.\omega. \underline{I}$	$\underline{U} = \frac{1}{j.C.\omega} . \underline{I}$
Fresnel impédance			
$ Z(\omega) $ module			
puissance énergie			

En électrotechnique, l'étude du comportement électrique des circuits RLC en régime sinusoïdal pour une fréquence fixe se fait avec les diagrammes de Fresnel associés au calcul complexe :



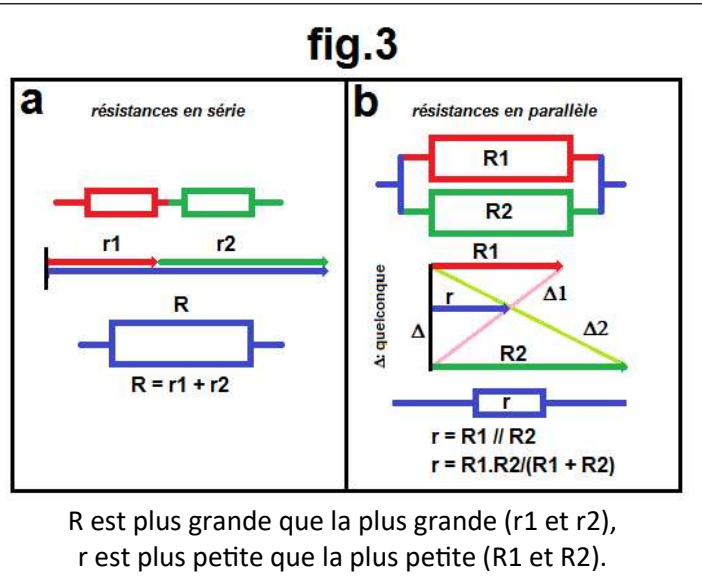
Ces diagrammes permettent de calculer les impédances, les tensions et courants et déphasage et les puissances mises en jeu. Ici, nous allons détourner leur emploi et modifier quelques constructions

graphiques pour l'analyse et la synthèse des circuits d'adaptation des circuits en haute fréquence en radioélectricité.

2° groupement d'impédances

2-1 Groupements de résistance fig.3 (a, b) :

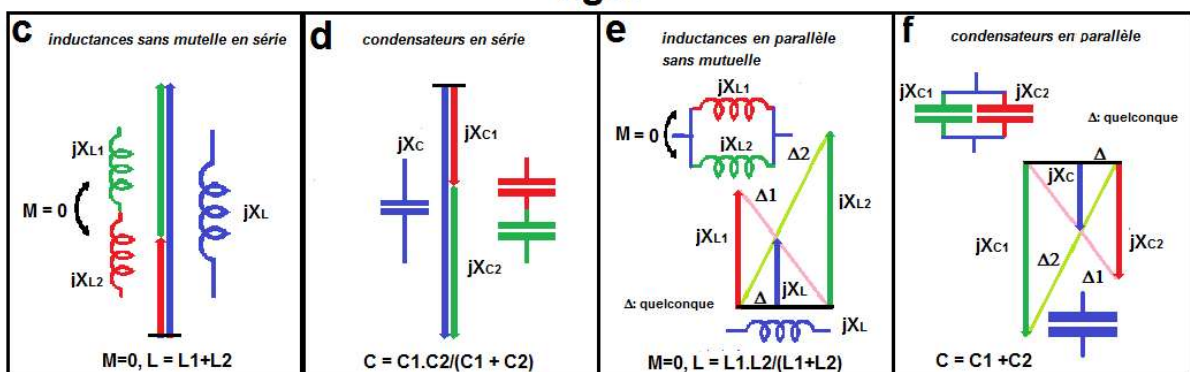
En série ou en parallèle. Classiquement la construction série se fait par l'addition de la longueur des vecteurs, la construction parallèle se fait sur l'addition des inverses avec inversion du résultat, nous proposons ici une méthode graphique plus directe. La distance Δ est choisie arbitrairement et elle n'a pas d'influence sur le résultat. Sa construction peut être provisoire. Nous traçons $\Delta 1$ et $\Delta 2$, le résultat est à l'intersection de ces droites. Ces résultats peuvent être démontrés par la géométrie et les propriétés des triangles semblables.



Les deux schémas peuvent être équivalents pour une même valeur de la résistance R , il y a une infinité de solution mais si nous imposons des contraintes sur les puissances dissipées comme $Pr_1=PR_1$ et $Pr_2=PR_2$ alors nous avons une seule solution, avec $r_1+r_2=R=R_1//R_2$, nous avons $r_1=R^2/R_1$ et $r_2=R^2/R_2$.

2-2 Groupement de capacités ou d'inductances fig.4 (c,d,e,f) : C'est le même principes avec des vecteurs déphasés de $\pm\pi/2$.

fig.4

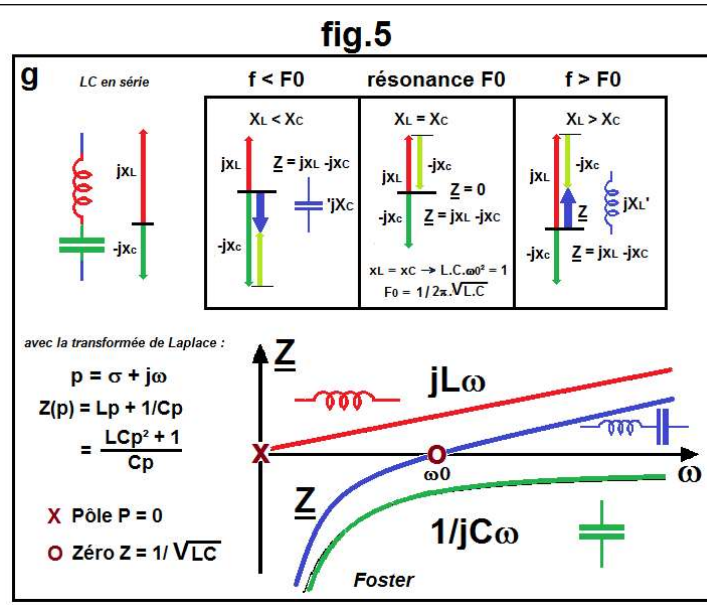


2-3 Circuits LC série sans résistance, c'est-à-dire sans amortissement fig.5 (g).

A la fréquence de résonance le groupement se comporte comme un court-circuit, il est capacitif ou inductif de part et d'autre.

$$\underline{Z} = j \cdot X_L - j \cdot X_C = j \cdot L\omega + 1/j \cdot C\omega \quad [\text{equ.1}]$$

$\underline{Z}(\omega)$ qui est représenté sur le graphe selon la règle de Foster (un pôle en zéro, un zéro en ω_0), le théorème de Foster fera l'objet d'une autre présentation.

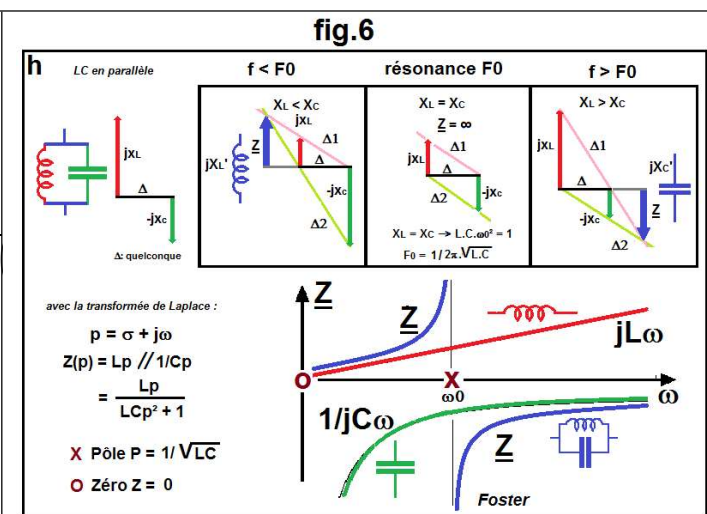


2-4 Circuits LC parallèle sans résistance, c'est-à-dire sans amortissement fig.6(h). A la fréquence de résonance le groupement se comporte comme un circuit ouvert, il est inductif en basse fréquence ou capacitif en haute fréquence.

A la fréquence de résonance Les droites $\Delta 1$ et $\Delta 2$ sont parallèles ce qui veut dire une impédance infinie, d'où le terme : *circuit bouchon*, employé jadis.

$$\underline{Z} = j \cdot X_L // -jX_C = \frac{-j \cdot X_L \cdot jX_C}{j \cdot X_L - jX_C} = \frac{1}{j \cdot X_L - jX_C} \quad [\text{equ.2}]$$

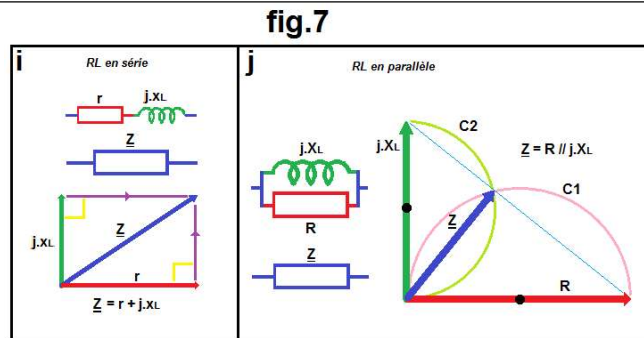
$\underline{Z}(\omega)$ qui est aussi représenté sur le graphe selon la règle de Foster (un zéro en zéro, un pôle en ω_0).



2-5 Groupement RL série ou parallèle fig.7(i,j) :

Le groupement série est évident (somme vectorielle), pour le groupement parallèle, les droites sont remplacées par des cercles inscrits centrés à $R/2$ et $X_L/2$. Les trois extrémités des vecteurs sont alignées.

Ces propriétés géométriques sont liées à celles des triangles rectangles et des angles inscrits au diamètre dans un cercle.



Pour le circuit série, nous avons un coefficient de qualité donné par :

$$Q = \frac{P \text{ réactive}}{P \text{ active}} = \frac{x_L \cdot i^2}{r \cdot i^2} = \frac{l\omega}{r} \quad [\text{equ.3}]$$

Pour le circuit parallèle, nous avons : $Q = \frac{P \text{ réactive}}{P \text{ active}} = \frac{u^2 / X_L}{u^2 / R} = \frac{R}{L\omega}$ [equ.4]

$$r + j \cdot x_L = \frac{R \cdot jX_L}{R + jX_L} = \frac{R \cdot jX_L \cdot (R - jX_L)}{(R + jX_L) \cdot (R - jX_L)} = \frac{R \cdot X_L^2 + jR^2 \cdot X_L}{R^2 + X_L^2} \quad \text{soit } r = \frac{R \cdot X_L^2}{R^2 + X_L^2} = \frac{R}{Q^2 + 1} \quad \text{et } x_L = \frac{R^2 \cdot X_L}{R^2 + X_L^2} = \frac{X_L}{Q^2 + 1}$$

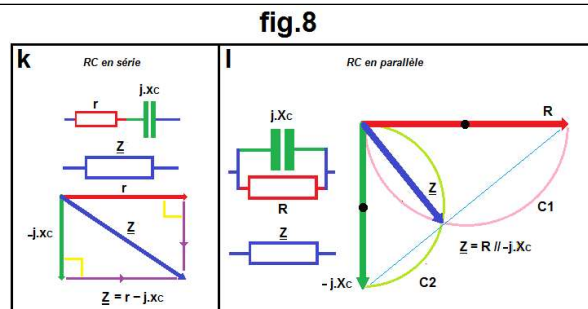
ce qui donne aussi avec

$$\underline{Z} = r + jx_L = R // jX_L, \quad |\underline{Z}|^2 = r^2 + x_L^2 = X_L^2 R^2 / (X_L^2 + R^2), \quad [\text{equ.5}]$$

$$r = |\underline{Z}|^2 / R, \quad x_L = |\underline{Z}|^2 / X_L$$

2-6 Groupement RC série ou parallèle fig.8(k,l) :

Le raisonnement est le même avec un graphe orienté vers le bas. Nous traçons R et $-jX_C$, puis les cercles inscrits $C1$ et $C2$, \underline{Z} est à l'intersection de ces cercles. Les trois extrémités sont alignées, il est donc possible de tracer directement la droite d'alignement et de rechercher l'angle droit.



Pour le circuit série, nous avons un coefficient de qualité donné par :

$$Q = \frac{P \text{ réactive}}{P \text{ active}} = \frac{x_C \cdot i^2}{r \cdot i^2} = 1/r \cdot c\omega \quad [\text{equ.6}]$$

Pour le circuit parallèle, nous avons : $Q = \frac{P \text{ réactive}}{P \text{ active}} = \frac{u^2 / X_C}{u^2 / R} = RC\omega$ [equ.7]

$$r + j \cdot x_C = \frac{R \cdot jX_C}{R + jX_C} = \frac{R \cdot jX_C \cdot (R - jX_C)}{(R + jX_C) \cdot (R - jX_C)} = \frac{R \cdot X_C^2 + jR^2 \cdot X_C}{R^2 + X_C^2} \text{ soit } r = \frac{R \cdot X_C^2}{R^2 + X_C^2} = \frac{R}{Q^2 + 1} \text{ et } x_L = \frac{R^2 \cdot X_C}{R^2 + X_C^2} = \frac{X_C}{Q^2 + 1}$$

ce qui donne aussi avec

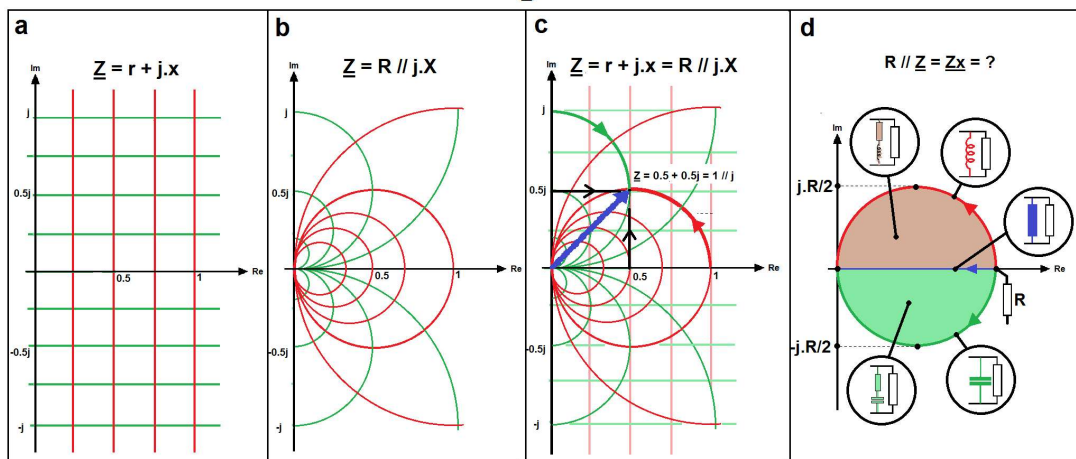
$$\underline{Z} = r + jx_C = R // jX_C, \quad |Z|^2 = r^2 + x_C^2 = X_C^2 R^2 / (X_C^2 + R^2), \quad [\text{equ.8}]$$

$$r = |Z|^2 / R, \quad x_C = |Z|^2 / X_C$$

3° Repère complexe $\underline{Z} = R + jX$ et déplacement série ou parallèle (fig.9)

Le repère complexe $\underline{Z} = R + jX$ est orthonormé, dans le cas d'une composition série $\underline{Z} = r + jx$, la lecture des graduations et les déplacements se font normalement sur le graphe (a) selon les abscisses et ordonnées, dans le cas d'une composition parallèle, la lecture et les déplacements se font sur les axes curvilignes (b) dont la valeur se lit sur les axes respectifs. Le même repère est utilisé pour les constructions mixtes ou pour les transformations.

fig.9

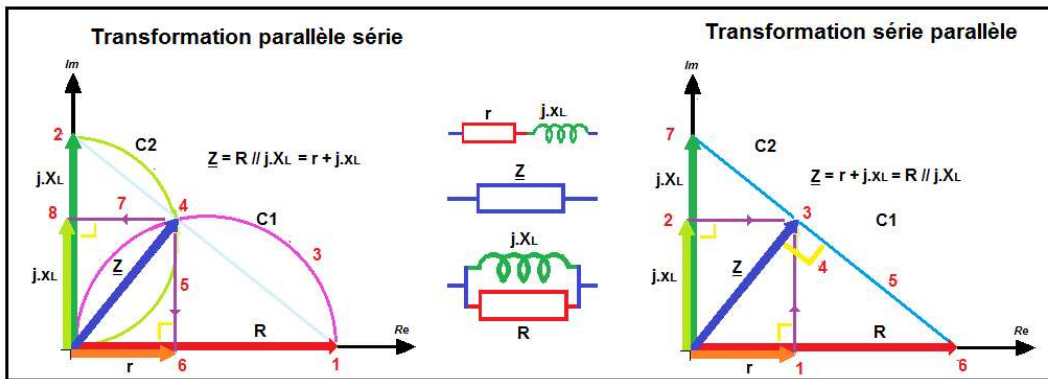


Nous constatons grâce à la figure (d) que l'impédance \underline{Zx} du groupement parallèle d'une résistance R et d'une autre impédance \underline{Z} quelconque se situe dans un espace limité par le cercle de diamètre R. Pour R parallèle avec une composition L,C quelconque, la solution \underline{Zx} est sur le cercle, avec une composition R,L,C (amortie), la solution \underline{Zx} est à l'intérieur du cercle. Nous voyons aussi que la partie réactive ne pourra pas dépasser $\pm jR/2$ quelque soit l'élément mis en parallèle et qu'elle sera maximale pour $X = R$.

4° Transformations parallèle-série (fig.10)

En partant des constructions précédentes (fig.7), les résultats sont directs, seul l'ordre de construction diffère selon le type de transformation (série-parallèle ou parallèle-série). L'ordre de construction est repéré par des chiffres en rouge, ce qui nous sera très utile dans la suite.

fig.10

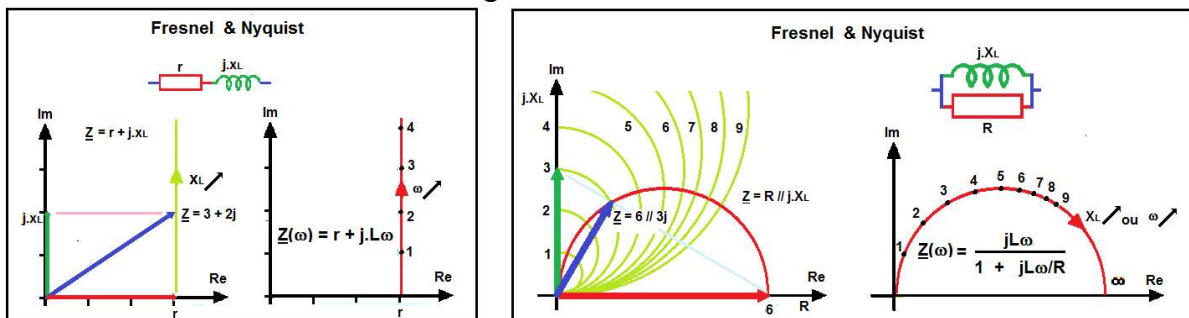


Les transformations pour un circuit capacitif se font exactement de la même façon mais avec la partie imaginaire orientée vers le bas.

5° diagramme de Fresnel et lieu de Nyquist :

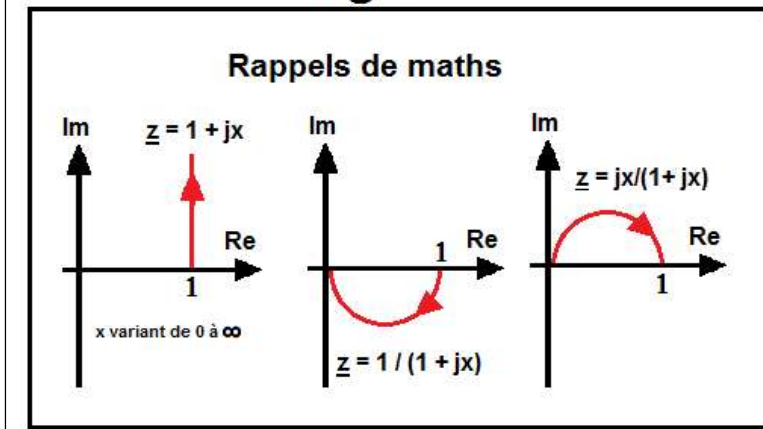
Le diagramme de Fresnel donne la valeur d'une impédance repérée par un vecteur dans un plan complexe, le lieu de Nyquist donne l'évolution de cette valeur dans ce même plan complexe pour différentes fréquences. Cette dernière construction donne un graphe orienté selon la croissance des fréquences. Pour avoir une signification et être exploitable, ce lieu de Nyquist doit être gradué et orienté.

fig.11



Les lieux de Nyquist représentent l'évolution des impédances ou des fonctions de transfert des filtres, ils sont très utilisés en électronique et en automatique, ils aident parfois aux constructions de Bode. Nous les retrouvons par exemple dans les graphes de Kennely pour l'étude des haut-parleurs ou celle des dispositifs piézo-électriques comme le quartz.

fig.12



Les transformations complexes :

Dans le plan de la variable complexe, le lieu de $z = 1 + jx$ est une demi-droite quand x varie de zéro à l'infini (l'orientation), son inverse $1/1 + jx$ est un demi cercle orienté qui se termine en zéro. L'inverse d'une droite sera un cercle passant en zéro, l'inverse d'un cercle ne passant pas en zéro, sera un autre cercle ne passant pas en zéro.

6° Les circuits d'adaptation.

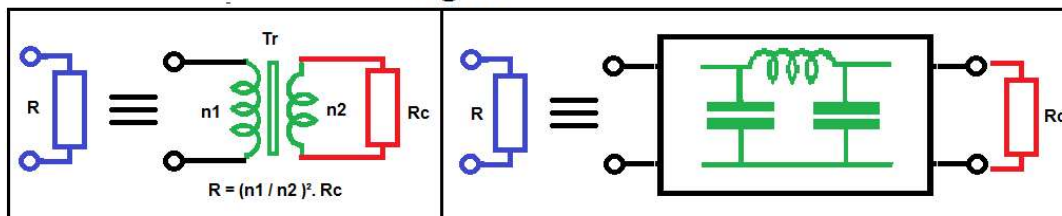
6-1 présentation : Pour transmettre de la puissance électrique à une résistance de charge R_c , il faut modifier sa valeur apparente en l'augmentant ou en la diminuant, ce sera le rôle d'un transformateur magnétique.

Si ce transformateur est parfait (pas de pertes ni ohmiques, ni magnétiques dans le fer, pas d'inductance de fuite et une inductance magnétisante infinie), il assumera parfaitement ce rôle. Sa largeur de bande passante est infinie, coté basse fréquence grâce à cette inductance infinie, coté haute-fréquence, car il est sans fuite et ne possède pas de capacités parasites. Ce transformateur parfait n'existe pas évidemment.

Si nous connectons R_c au secondaire, vue du primaire la résistance sera $R = (n_1/n_2)^2 \cdot R_c$. Cette relation est réciproque quand nous connectons R au primaire, la résistance vue du secondaire sera $R_c = (n_2/n_1)^2 \cdot R$ [equ.9]

Dans les circuits RF à large bande, l'utilisation de transformateurs toriques sur ferrite HF convient pour cet usage, ils permettent de plus la symétrisation (balun). Pour les circuits à bande étroite, l'utilisation de quadripôles LC peut être préférable et plus économique, ce sont ces circuits que nous allons étudier, les deux relations précédentes restent vraies, avec élévation ou abaissement des tensions et des courants et conservation des puissances entre primaire et secondaire.

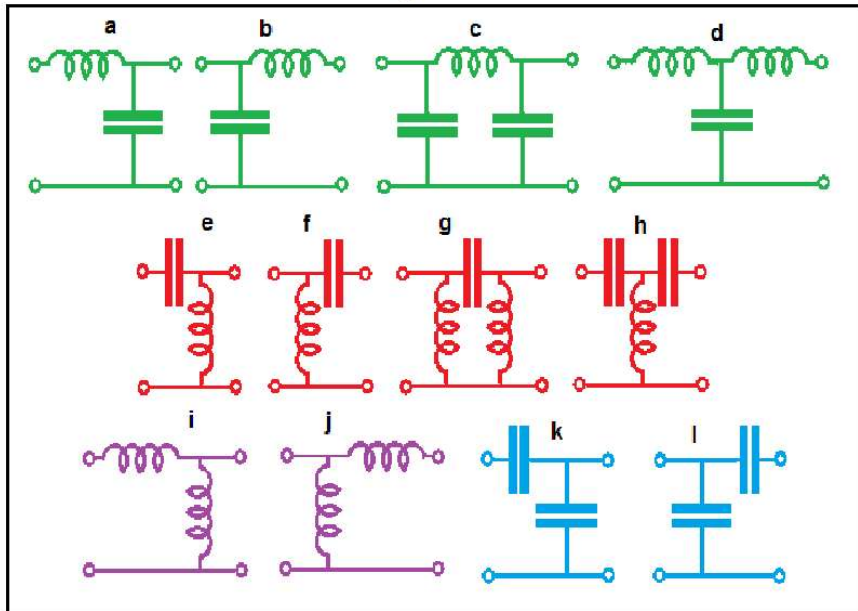
fig.13



6-2 différents schémas : Dans nos circuits radioélectriques, nous rencontrons plusieurs topologies (Γ , Π , T, etc.) qui pour l'essentiel sont représentés sur la fig.14. Selon la technologie et le domaine de

fréquence nous pouvons privilégier le nombre d'inductance par rapport aux condensateurs ou l'inverse. Ces circuits ont aussi un comportement de filtre qui peut être mis à contribution, ils ont des facilités de réglage les uns par rapport aux autres. Tout ces choix et décisions ne relèvent pas de cette présentation. De même l'étude des circuits d'adaptation se fait souvent de façon plus élégante avec un abaque de Smith.

fig.14



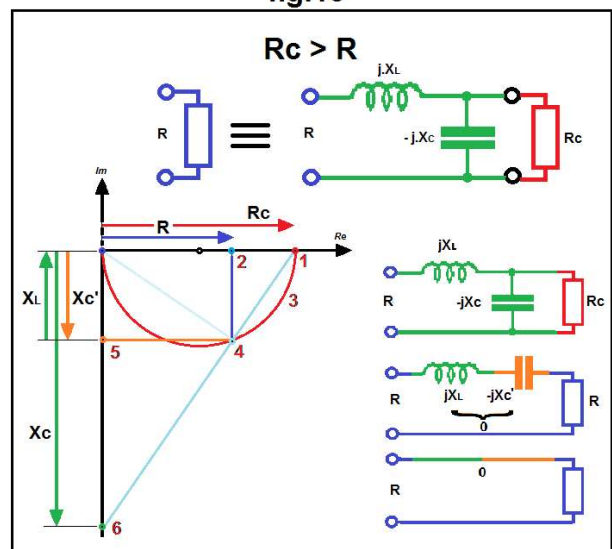
Les circuits LC en gamma (a, b, e, f) ne permettent pas tout les réglages, la charge peut être complexe ou réelle, mais pour un schéma donné le domaine d'emploi des réglages est limité, cet aspect est plus facile à aborder avec l'abaque de Smith.

6-3 Circuits en gamma: La figure suivante (fig.15) montre la construction progressive pour une charge R_c supérieure à R (suivre l'ordre des chiffres rouge).

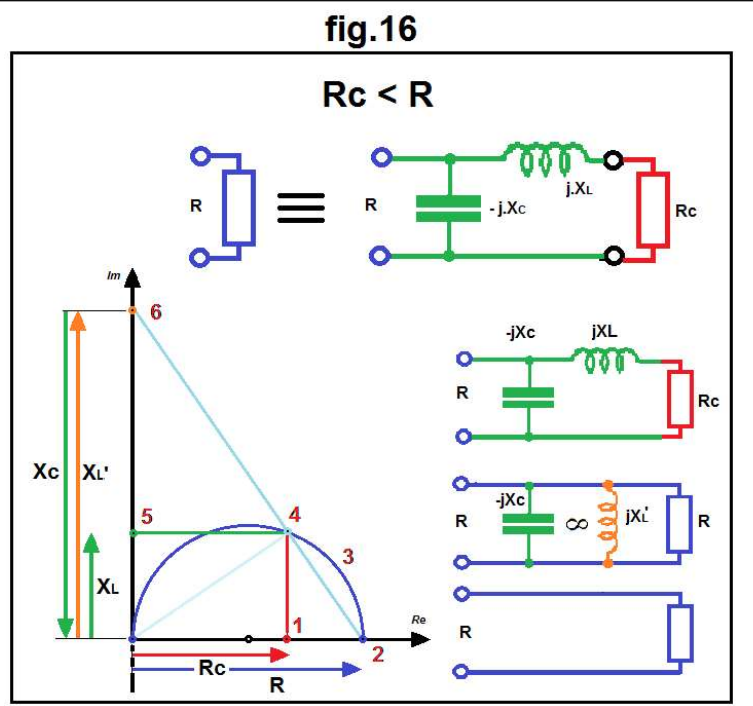
Nous plaçons en premier R_c et R , traçons le cercle inscrit. Le groupement $R_c//X_c$ possède un équivalent série $R-jX_c'$, l'impédance selfique jX_L sert à annuler la composante capacitive $-jX_c'$ résiduelle.

Nous voyons que le condensateur C fixe la valeur de R et que la self ne sert qu'à compenser le résidu capacitif.

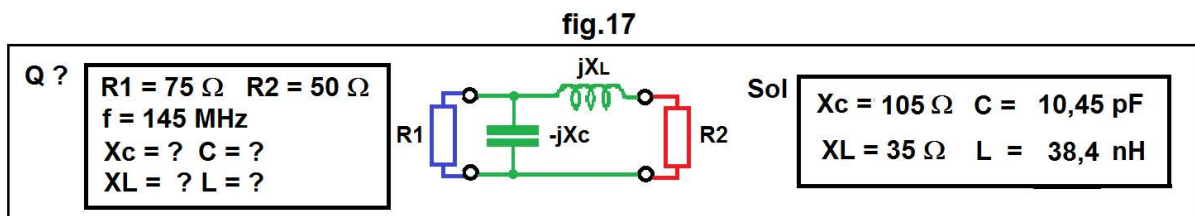
fig.15



La figure suivante (fig.16) montre la construction progressive pour le circuit réciproque, le réglage de la self détermine la valeur de R, le résidu selfique en parallèle est annulé par un condensateur parallèle qui le met en résonance. Pour une fréquence donnée, on veut avoir R plus grand que la charge réelle R_c , Le groupement série $R_c + jX_L$ admet un équivalent parallèle $R // jX_L'$, le choix de l'inductance est définitif. La réactance jX_L' sera compensée par la réactance d'un condensateur $-jX_c$ par le mécanisme de la résonance parallèle : $-jX_c // jX_L' = \infty$.

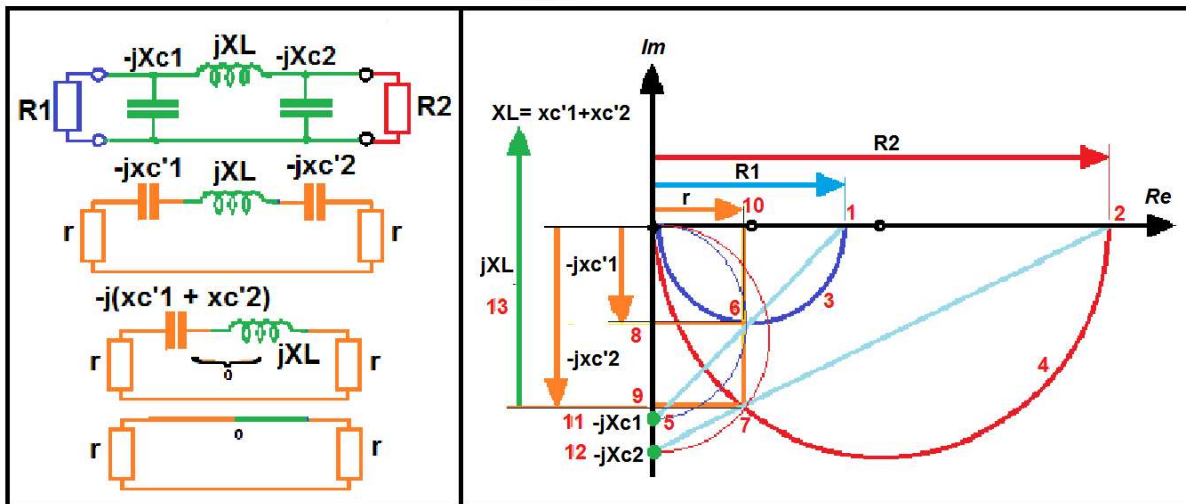


A vos compas : Vous pouvez mettre en œuvre ces deux méthodes graphiques qui viennent d'être décrites avec l'application numérique pour le problème suivant (fig.17), en prenant le circuit dans un sens ou bien l'autre.



6-4 Adaptation en pi (fig.18) : Le circuit en pi permet d'adapter toutes les valeurs de charge à toutes les valeurs désirées. L'adaptation peut être faite par une infinité de réglages différents, ce qui permet de rajouter une contrainte supplémentaire, ce sera le coefficient de qualité Q. Du fait de travailler sur une largeur de bande donnée, ce coefficient Q devra être faible pour ne pas faire apparaître de fréquence de résonance, ni de surtension. Pour faciliter la construction, nous allons considérer le filtre chargé à ses deux extrémités (R_1 et R_2) et conduire leur transformation parallèle-série en même temps. Nous choisirons X_{c1} du même ordre de grandeur que R_1 , ce qui amène à déterminer une résistance r interne dite de transfert, la transformation de $R_2 // -j X_{c2}$ sera choisie pour avoir le même résultat : r série. Les valeurs de X_{c1} , X_{c2} et X_L sont alors simples à évaluer.

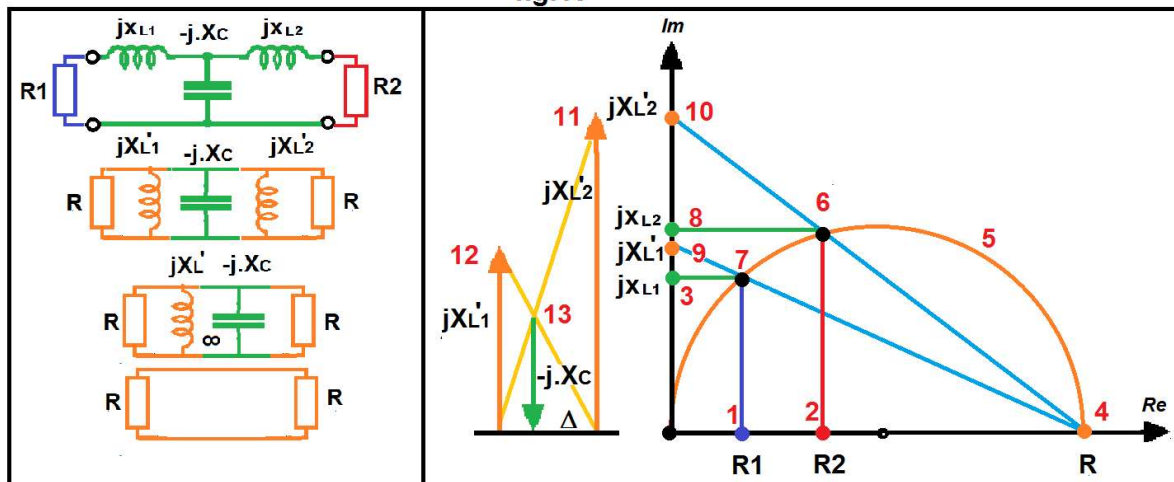
fig.18



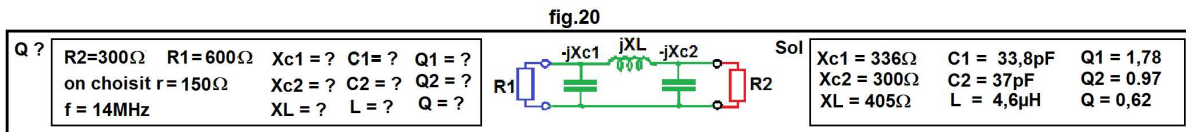
Le facteur Q total sera fonction des charges des deux extrémités et pour le définir, il faut revenir à sa définition de base : $Q = P_{\text{réact.}} / P_{\text{act.}}$, nous obtenons $1/Q = 1/Q_1 + 1/Q_2$ [equ.10]. Dans la pratique des amplificateurs de puissance, pour avoir un bon rendement de transfert en puissance, l'entrée du circuit ne sera pas un générateur de tension ayant une résistance interne R1 mais une valeur beaucoup plus faible, nous négligerons son amortissement et seule R2 participera au calcul de Q. Sa valeur sera alors $Q = R_2 \cdot C_2 \cdot \omega = L \cdot \omega / r$ [equ.11].

6-5 Circuit en T (fig.19): moins connu que le précédent, ce circuit est aussi fréquemment utilisé, il faut choisir ici une résistance interne de transfert R plus grande que les valeurs d'extrémité. Ce choix se fait en égard du coefficient de qualité désiré, soit en positionnant jXL_1 ou directement R. La conduite de la construction reste simple, le graphe situé à gauche correspond au calcul des deux inductances en parallèle que nous compensons directement par du capacitif $-jXc$ de la capacité centrale.

fig.19



A vos compas : Vous pouvez mettre en œuvre le calcul d'un circuit en pi avec le problème suivant (fig.20).



Limites de la méthode : La construction devient laborieuse si la charge en extrémité est complexe (série ou parallèle) et elle devient impossible graphiquement pour des rapport trop grands entre R_2 et R_1 par manque de place sur un plan. L'abaque de Smith, par une transformation complexe du plan, va nous permettre de résoudre élégamment ces problèmes.

Conclusions : Cette méthode graphique peu connue dans la littérature technique est ici appliquée aux circuits RF, elle est aussi utilisable dans d'autres domaines de l'électricité, comme celui du transport de l'énergie et des interconnexions ou dans l'étude des machines. Avec nos moyens de calcul actuels, son intérêt ne réside pas dans la précision des calculs mais dans l'aspect didactique qu'elle apporte et la compréhension des phénomènes physiques mis en œuvre. Il sera plus aisé de faire ces constructions avec l'abaque de Smith en particulier pour des grandes variations de valeur. Cette méthode graphique permet aussi d'aborder l'étude de l'abaque de Smith plus progressivement et d'être un complément pédagogique utile à cette étude.

Références bibliographiques :-**Graphical solution of impedance-matching problems** I.L.McNally (W1NKC) and Henry S.Keen (W2CTK) **ham radio** march 1978.

-**Kreis-und Leitungs-Diagramme** H.Geschwinde FRANZIS. ISBN 3-7723-5123-9

-**Hochfrequenztechnik 1** J.Kammerloher C.F.WINTER'SCHEVERLAGSHANDLUNG LEIPZIG

-**ELEKTROTECHNIK** MOELLER-WOLFF Leipzig/B.G.Teubner/Berlin